

О ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ НЕСУЩЕЙ СТАЛЬНОЙ РАМЫ АНГАРА ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

**Трясунова А.А., Колоколов С.Б., д-р техн. наук, профессор
Оренбургский государственный университет**

Одной из наиболее эффективных конструкций ангаров для самолетов является рамная распорная конструкция из стальных элементов переменного сечения (рисунок 1). Переменное сечение элементов позволяет сосредоточить материал конструкции в местах концентрации напряжений и тем самым снизить расход стали на сооружение. Поперечные сечения элементов рам обычно имеют двутавровую или прямоугольную трубчатую форму. С точки зрения затрат на изготовление элементов предпочтительным является двутавровое сварное сечение. С целью уменьшения изгибающих моментов, несущий элемент перекрытия делается ломаным. Стрела подъема этого элемента подбирается из условия минимизации изгибающих моментов с учетом увеличения расхода материала при увеличении стрелы подъема.

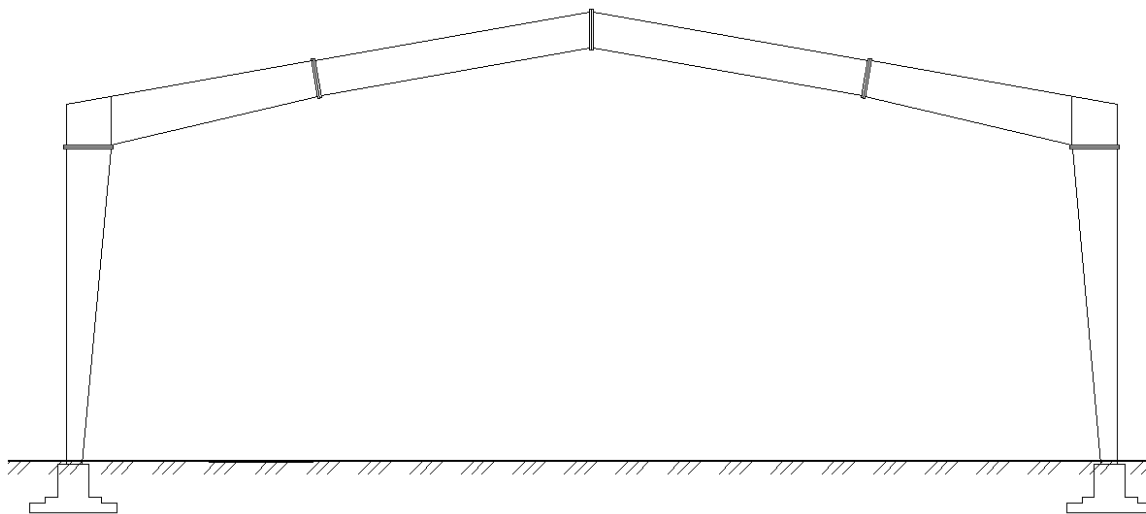


Рисунок 1- Рама переменного сечения

Важной проблемой, возникающей при расчете несущих конструкций ангара, выполненных из элементов переменного сечения, является адекватный учет переменной жесткости элементов. Дело в том, что расчетная схема поперечной рамы каркаса является статически неопределимой, (чаще всего - двухшарнирной). Следовательно, жесткость элементов, числовой характеристикой которой в изгибаемых конструкциях является момент инерции сечения, влияет на распределение внутренних усилий.

В современных вычислительных комплексах определение напряженно-деформированного состояния конструкций осуществляется методом конечных элементов. При расчете рамы с элементами переменного сечения определение

перемещений элемента (без учета влияния продольных и поперечных сил) может быть осуществлено по формуле Мора:

$$\Delta = \int_{x_2}^{x_1} \frac{M(x)\bar{M}(x)}{EI(x)} dx, \quad (1)$$

где: $M(x)$ – функция, описывающая изгибающий момент, вызванный действующей на элемент нагрузкой;

$\bar{M}(x)$ – то же, но вызванная единичной нагрузкой;

E – модуль упругости;

$I(x)$ – функция изменения момента инерции на участке стержня между сечениями с координатами x_1 и x_2 .

При применении вычислительных комплексов величина интеграла Мора при постоянной жесткости элементов находится численно с использованием той или иной достаточно простой квадратурной формулы, поскольку функция $M(x)$ и $\bar{M}(x)$ обычно не сложнее квадратичной. Функция $J(x)$ в рассматриваемом случае намного сложнее. Запишем ее:

$$J = \frac{t_w \cdot h_w^3}{12} + (t_w \cdot h_w + 2t_f \cdot b_f) \left(\frac{h_w + t_f}{12} \right)^2, \quad (2)$$

где: t_w – толщина стенки (рисунок 2);

h_w – высота стенки;

t_f – толщина пояса;

b_f – ширина пояса.

Кроме высоты стенки, входящие в формулу параметры в рассматриваемом случае постоянны. Высота стенки при линейном характере изменения высоты:

$$h_w(x) = h_{w0} + \alpha x, \quad (3)$$

где: α – постоянный коэффициент;

h_{w0} – высота стенки в начале участка.

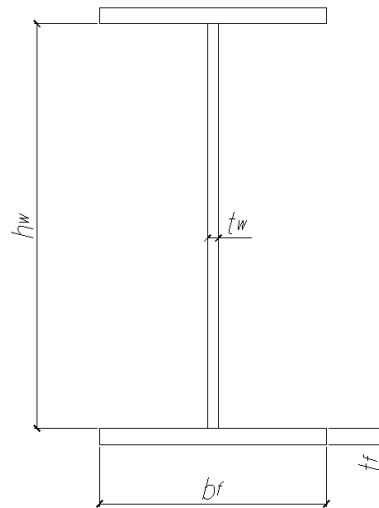


Рисунок 2- Сечение элемента

Если подставить в выражение (2) представление (3), то получим довольно громоздкую функцию, которая будучи подставленная в (1) превращает вычисление интеграла в непреодолимые математические трудности. Поэтому для назначения эквивалентной жесткости конечного элемента используется простой способ – находится жесткость сечения, расположенного посередине элемента т.е. сечения, высота которого равна средней между высотой сечений, расположенных по торцам элемента. Такое решение, однако, может приводить к ошибке. Покажем это на примерах.

Пусть толщина стенки $t_w = 1$ см, толщина пояса $t_f = 2$ см, ширина пояса $b_f = 50$ см. Вычисляем момент инерции по торцам, где высота стенки соответственно $h_{w1} = 80$ см и $h_{w2} = 100$ см (рисунок 3). Результаты вычислений: $J_1 = 489000 \text{ см}^4$, $J_2 = 850000 \text{ см}^4$. Следовательно, средний по величине на рассматриваемом участке момент инерции равен 670000 см^4 . Вычисление момента инерции для сечения, находящегося посередине участка, высота стенки которого $h_w = 90$ см, дало результат $J = 668000 \text{ см}^4$, то есть практически совпадает с полученным выше нужным значением.

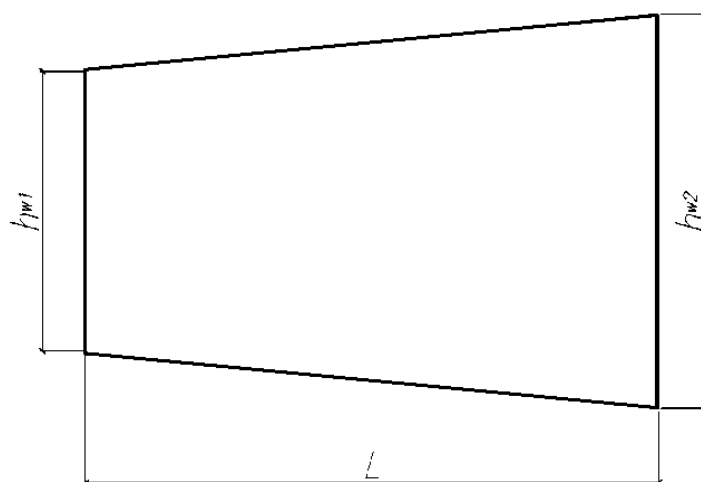


Рисунок 3- Элемент переменного сечения

Рассмотрим теперь участок, по торцам которого высота стенки, соответственно, равна $h_{w1} = 60\text{см}$ и $h_{w2} = 100\text{см}$. Вычислим момент инерции сечения, высота которого $h_{w1} = 60\text{см}$, он оказывается равным $J = 263000\text{см}^4$. Средняя величина момента инерции участка, следовательно, равна $J = (263000\text{см}^4 + 850000\text{см}^4)/2 = 556000\text{см}^4$. Величина момента инерции, вычисленная с высотой стенки, средней между высотой стенки на торцах - $h_{w1} = 80\text{см}$ - приведена выше $J_1 = 489000\text{см}^4$, т.е. отличается от средней ($J = 556000\text{см}^4$) на 14 %. Еще сильнее разнятся величины моментов инерции, вычисленных по разным методикам, если разница между высотой стенки на торцах участка еще больше 20см и 100см. Приведем эти данные. Момент инерции при $h_{w1} = 20\text{см}$ - $J = 26640\text{см}^4$. Величина момента инерции, вычисленная, как средняя между моментами инерции сечений по торцам: $J_2 = 850000\text{см}^4$, а момент инерции для среднего на участке сечения при $h_{w1} = 60\text{см}$ – вычислена выше и равна $J = 263000\text{см}^4$. Разница – 67%.

Таким образом, назначать жесткость (EJ) конечного элемента, равной жесткости сечения, расположенного посередине элемента, можно, если разность высоты стенки двутавра по торцам элемента невелика, и нельзя, если, наоборот, велика. Конечно, такая рекомендация очевидна: лучше всего, если сечение элемента по длине вообще не меняется. Важно, однако, знать длину конечного элемента, которая позволяет с допустимой погрешностью назначать эквивалентную жесткость элемента по высоте стенки среднего сечения элемента. Если использовать для выработки критерия рассмотренные примеры, то можно считать разность высот стенки по торцам, равную 20см как приемлемую, равную 40см – как допустимую для грубой оценки, а равную 80см – как искажающую результат. Но величина диапазона не может служить критерием, поскольку размеры сечений элементов разных по габаритам конструкций могут отличаться на порядок. Следовательно, в качестве критерия нужно принимать относительную величину, относя указанную разность $h_{w2} - h_{w1}$ к характерному размеру сечению. Такой величиной является средняя высота стенки элемента $(h_{w2} + h_{w1})/2$. В приведенных примерах получаем последовательно:

при высоте стенки на торцах 100см и 80см:

$$k_1 = 2 \frac{h_{w2} - h_{w1}}{h_{w2} + h_{w1}} = 2 \frac{100 - 80}{100 + 80} = 0,22,$$

при высоте стенки на торцах 100см и 60см:

$$k_1 = 2 \frac{h_{w2} - h_{w1}}{h_{w2} + h_{w1}} = 2 \frac{100 - 60}{100 + 60} = 0,50,$$

при высоте стенки на торцах 100см и 20см:

$$k_1 = 2 \frac{h_{w2} - h_{w1}}{h_{w2} + h_{w1}} = 2 \frac{100 - 20}{100 + 20} = 1,33,$$

Таким образом, критерием при выборе длины конечного элемента при разбиении рамной схемы рамы с элементами переменного сечения может служить величина коэффициента $k \leq 0,2$. Тогда условие для разбиения элемента рамы на конечные элементы выглядит так:

$$2 \frac{(h_{w2} - h_{w1})}{h_{w2} + h_{w1}} \leq 0,2; \quad (4)$$

Преобразуя это условие можно получить допустимую величину h_{w2} через h_{w1} :

$$h_{w2} = 1,2h_{w1} \quad (5)$$

Используя представление (3) можно получить также зависимость максимально допустимой длины конечного элемента l от высоты стенки меньшего сечения торца конечного элемента:

$$l = \frac{0,2h_{w1}}{\alpha} \quad (6)$$

Приведем пример использования полученной формулы. Требуется разбить на конечные элементы стойку рамы высотой $H = 6$ м, если нижний торец колонны имеет двутавровое сечение с высотой стенки $h_{min} = 30$ см, а верхний с высотой стенки $h_{max} = 60$ см.

Определим коэффициент α :

$$\alpha = \frac{h_{w\ max} - h_{w\ min}}{H} = \frac{66 - 30}{600} = 0,05.$$

Подставляем известные величины и получаем длину конечного элемента:

$$l = \frac{0,2 \cdot 2}{0,05} = 120 \text{ см.}$$

Таким образом, при составлении численной модели стойки рамы следует разбить ее не менее, чем на пять элементов равной длины.

Проверим теперь разработанную модель на произвольно выбранном варианте конструкции рамы, сечения которой отличаются толщинами стенки и поясов двутавра и ширины его поясов от рассмотренного модельного варианта. Пусть толщина стенки составляет $t_w = 5$ мм, толщин пояса - $t_f = 8$ мм, ширина

пояса $b_f = 30$ см. Высота стенки двутавра на торцах участка составляет $h_{w1} = 20$ см, $h_{w2} = 40$ см, величина момента инерции, соответственно, - $J_1 = 6540 \text{ см}^4$, $J_2 = 30848 \text{ см}^4$. Величина момента инерции посередине участка (при $h = 30$ см) $J = 15966 \text{ см}^4$. Среднее значение между моментами инерции на торцах - $J = 18696 \text{ см}^4$. Разница составляет 17%.

Разобьем рассмотренный элемент на два равных участка. Проанализируем первый с высотой стенки на торцах $h_{w1} = 20$ см, $h_{w2} = 30$ см. Момент инерции при $h_{w2} = 30$ см получен выше, а средний по величине для участков равен: $J = (6540 \text{ см}^4 + 15966 \text{ см}^4)/2 = 11253 \text{ см}^4$. Момент инерции на втором участке для сечения в середине ($h_w = 25$ см) равен $J = 10636 \text{ см}^4$. Разница составляет 6 %. Разобьем теперь первый участок пополам. Тогда на большем торце $h_w = 25$ см средняя величина момента инерции будет равна: $J = (6540 \text{ см}^4 + 10636 \text{ см}^4)/2 = 8588 \text{ см}^4$. Значение момента инерции сечения посередине ($h_w = 22.5$ см) $J = 88443 \text{ см}^4$ – разница 1,7%.

Еще более точный результат будет, если использовать формулу (5) и ограничить участок сечением с высотой стенки 24 см. Проверим это. Момент инерции при $h_w = 24$ см равен $J = 9722 \text{ см}^4$. Средний для участка: $J = (6540 \text{ см}^4 + 9722 \text{ см}^4)/2 = 8131 \text{ см}^4$. Момент инерции сечения в середине участка ($h_w = 22$ см) $J = 8040 \text{ см}^4$ – разница 1,1%.

Следовательно, сформулированные в данной работе рекомендации по определению длины конечного элемента при составлении расчетной конечно-элементной модели рамы переменного сечения гарантируют точность вычислений при назначении жесткости конечных элементов по величине момента инерции в их среднем сечении.

Список литературы

1. Катюшин В.В. Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения (расчет, проектирование, строительство). – монография : ОАО Издательство Стройиздат, 2005. – 656 с. : ил. – ISBN 5-274-02030-5.
2. Горев В.В. Металлические конструкции. Том 1 (3) Элементы конструкций : учебник для строительных вузов / В.В. Горев, Б.Ю. Уваров, В.В. Филиппов и др.; под ред. В.В.Горева – 3-е изд., стер. – М : Высшая школа, 2004. – 551 с. – ISBN 5-06-003695-2 (т. 1).