ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ: ОТ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧАМ ОЛИМПИАДНОЙ СЛОЖНОСТИ

Сикорская Г.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Все большую популярность среди учащихся школ обретает олимпиада по математике. Одаренные ребята стремятся участвовать в математической олимпиаде, ведь появляется возможность побороться с сильными соперниками, сравнить свои математические способности и достижения не только с учащимися своей школы. Не секрет, что подготовка к олимпиадным турнирам – дело очень трудоемкое и кропотливое. И, конечно, работать с такими же увлеченными математикой ребятами в группе гораздо интереснее, чем заниматься математикой только в своем, хотя и очень любимом классе. Поэтому к задаче подготовки учащихся к математической олимпиаде подключился Оренбургский государственный университет, пригласивший к себе одаренных ребят не только города Оренбурга, но и области.

Занятия, организованные ОГУ предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически олимпиадные задания отличаются от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, поэтому, занятия в группе под руководством преподавателя университета, направлены в том числе и на на формирование психологической готовности к выполнению таких заданий.

Традиционно, большую роль в формировании олимпиадных заданий отводится задачам по теории чисел. Поэтому теория чисел обязательный раздел занятий. На занятиях в ОГУ юным математикам преподносится, возможно, уже знакомый со школьной скамьи материал, но в более глубоком и одновременно обобщающем варианте, что позволяет ребятам, возможно более уверенно, браться за задачи высокого уровня сложности.

Приведем примеры «удачных» задач, решаемых со школьниками на занятиях по подготовке к математической олимпиаде (раздел – теория чисел).

Задача. Можно ли составить из цифр 2, 3, 4, 9 (каждую цифру можно использовать неограниченное число раз) два числа, одно из которых в 123456789 раз больше другого?

Решение. По условию задания числа *x, y* находятся в таком соотношении:

$x = 123456789y$.

Какой может быть последняя цифра числа *y*? Очевидно, любая из, предложенных.

Рассмотрим все возможные последние цифры числа *y* и проанализируем, какая тогда цифра будет последней числа *x*.

По условию, *y* и *x* составлены из цифр 2, 3, 4, 9.

Если последняя цифра *y* будет 2, то $x=123456789 \cdot 2 = \ldots 8$. Следовательно, последняя цифра *x* будет 8 и т.д.

Проиллюстрируем рассуждения табличкой.

Последняя цифра чисел y и x.

y	x
2	8
3	7
4	6
9	1

Вывод: числа, получаемые при умножении чисел, которые оканчиваются цифрами 2, 3, 4, 9 на 123456789, оканчиваются на 8, 7, 6, 1. Но по условию число x должно содержать только цифры 2, 3, 4, 9. Получили противоречие.

Ответ: нет, не может.

Задача. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих числе равно – 3. Среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных их них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске;

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных;

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение. а) Пусть a – количество положительных чисел, b – количество отрицательных чисел.

$4 \cdot a$ – сумма всех положительных чисел

$-8b$ – сумма всех отрицательных чисел

$4a – 8b$ – сумма всех чисел

$a + b + c$ – количество всех чисел (положительных, отрицательных, нулей)

$$=> \begin{cases} \frac{4a-8b}{a+b+c} = -3 \\ 40 < a+b+c < 48 \end{cases}$$

По условию среднее арифметическое всех числе равно -3, а всего чисел более 40, но менее 48.

$$\frac{4a-8b}{a+b+c} = -3$$
$$4a - 8b = -3a - 3b - 3c$$
$$7a - 5b + 3c = 0(*)$$

Введем обозначение $t = a + b + c$ => надо найти t.

И так $t = a + b + c$ (=> $c = t - a - b$)

(*)$7a - 5b + 3c = 0$

$7a - 5b + 3(t - b - a) = 0$

$7a - 5b + 3t - 3a - 3b = 0$

$4a - 8b = -3t$

$4(a-2b) =$ $-3t$

$4(a – 2b)$ кратно 4, следовательно, $-3t$ должно быть кратно 4.

Но, число -3 не кратно 4, а это значит, четырем может быть кратно только t. Таким образом, заключаем, что

$$t\ (a+b+c) ⋮ 4$$

Согласно условия, $0 < a+b+c < 48$

Имеем, a+b+c = 44 (как единственное число, кратное 4 на промежутке (40;48))

Ответ:44.

б) Ответим на второй вопрос, - каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

$$\begin{cases} a+b+c=44 \\ 7a-5b+3c=0 \end{cases}$$

$$7a-5b+3c=0$$
$$5b=7a+3c\ |:5$$
$$b=\frac{7a}{5}+\frac{3c}{5}$$
$$b=a+\frac{2a}{5}+\frac{3c}{5}>a$$

т.к. $a>1$, то $\frac{2a}{5}>0$, следовательно, $b>a$, т.е. отрицательных чисел больше положительных.

Ответ: отрицательных чисел больше положительных.

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

$$\begin{cases} a+b+c=44 \\ 7a-5b+3c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c=44 \\ 5b=7a+3c \end{cases} \Rightarrow 5a+5b+5c=220$$

$$5a+7a+3c+5c=220$$
$$12a+8c=220|:4 \Rightarrow\ 3a+2c=55$$
$$3a=55-2c$$
$$a=\frac{55-2c}{3}$$

c – количество нулей.

Переберем все с.

Если с = 0, то $a=\frac{55}{3}\notin Z.$

Если с = 1, то $a=\frac{53}{3}\notin Z.$

Если c = 0, то $a = \frac{51}{3} = 17$.

Таким образом, если c=2, a=17, то b = 44-2-17=25.

Проверим условия: 1) $a + b + c = 44$

2+17+25=44 – выполняется

2) $\frac{4a-8b}{a+b+c} = -3$

$\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3$ – выполняется

И так, получили, что число содержит 14 четверок, 25 числа (-8) и два нуля. Такой набор чисел дает среднее арифметическое равное -3. Т.е. все условия задачи выполнены.

Коротко опишем второй способ решения.

$\begin{cases} a + b + c = 44| \cdot 3 \\ 7a - 5b + 3c = 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} 3a + 3b + 3c = 132 \\ 3c = -7a + 5b \end{cases}$

Подставим второе уравнение в первое:

$3a + 3b - 7a + 5b = 132$

$-4a + 8b = 132|: 4$

$-a + 2b = 33$ => $2b = 33 + a$

По условию $a + b + c = 44$

=> $a + b \leq 44$

$a \leq 44 - b$,

но $2b = 33 + a$

=> $2b = 33 + 44 - b$

$3b \leq 77$

$b \leq \frac{77}{3}$ => т.к. $b \in Z$, то $b \leq 25$

$a = 2b - 33 \leq 55 - 33 = 17$

=> $a \leq 17$

Если a=17, то b = 33 – 17 = 25, c = 2

$\frac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3$

Ответ: a=17, b = 25, c = 2

Задача. На доске написали несколько необязательно различных чисел двухзначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалось равна 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифру.

а) Приведите пример исходных чисел, для каждых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше суммы исходных чисел.

б) Может ли сумму получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше суммы исходных чисел.

Решение.

а)

1) S_1 – сумма исходных чисел.

$S_1 = 2972$

S_2 – сумма получившихся чисел.

$S_2 = \frac{S_1}{3} = 990$

Заметим, что число 2970 : 99 = 30

$$\underbrace{99, 99, \ldots 99}_{30}$$

Если все числа будут самыми большими из возможных, то есть 99, то всего их может быть 30 штук.

Значит, на доске было записано не менее 30 чисел.

2) Пусть число $\overline{ab} = 10a + b$ (на пример $97 = 9 \cdot 10 + 7$).

Последовательность исходных чисел

$\overline{a_1b_1}, \overline{a_2b_2}, \ldots \overline{a_nb_n}$

$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ – Сумма числа десятков

$B = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ – Сумма числа единиц,

т. о.

$$S_1 = 10A + B = 2970$$

Вторая последовательность

$\overline{b_1a_1}, \overline{b_2a_2}, \ldots \overline{b_na_n}$

=> $S_1 = 10A + B = 990$

$\begin{cases} 10A + B = 2970 \\ 10A + B = 990 \end{cases}$ $\begin{cases} 11A + 11B = 3960 \\ 9A - 9B = 1980 \end{cases}$ //Сложили и вычли уравнения системы

(Напомним, кратно 11, означает равенство суммы цифр, стоящих на четных местах, сумме цифр, стоящих на нечетных местах, следовательно, 3960:11.)

Следовательно, $\begin{cases} A + B = 360 \\ A - B = 220 \end{cases}$

Сложим равенства системы: 2A = 580 => A = $\frac{580}{2}$ = 290

Теперь, вычитая равенства системы, находим B:

2B = 140 => B = $\frac{140}{2}$ = 70

A – сумма всех цифр, стоящих в разряде десятков.

B – сумма всех цифр, стоящих в разряде единиц.

Наибольшая цифра, которая может стоять в разряде единиц или десятков это цифра 9, следовательно, можно определить наименьшее число двузначных чисел, которые были записаны на доске.

290 : 90 = $32\frac{2}{9}$. Следовательно, вывод: количество чисел не менее 33.

70 : 9 = $7\frac{7}{9}$ Вывод: количество единиц не менее восьми.

$\begin{cases} n \geq 33 \\ n \geq 8 \end{cases}$ => $n \geq 33$

$\frac{A}{B} = \frac{290}{70} = \frac{29}{7} = 4\frac{1}{9}$

Это означает, что сумма цифр, стоящих в разряде десятков более чем в 4 раза превышает сумму цифр, стоящих в разряде единиц.

Какие это могут быть числа? Это, например: 51, 92 и т. д.

а) $32 \cdot \boxed{92} + \boxed{26} = 2970$

2944

$32 \cdot \boxed{29} + \boxed{62} = 990$

928

Ответ: 32 раза записано число 92 и один раз число 26.

Другой, возможный вариант:

$50 \cdot \boxed{51} + 20\,\boxed{21} = 2970$

$50 \cdot \boxed{15} + 20\,\boxed{12} = 990$

б) Может ли сумму получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше суммы исходных чисел?

Предположим, что да, т.е. возможно такое число, что

$$10A + B = 5\,(10B + A)$$
$$10A + B = 50B + 5A$$
$$5A = 49B$$
$$A = \frac{49}{5}B$$
$$A = 9\frac{4}{5}B$$

т.е. если A=kB, то k>9,

Но это утверждение - противоречие, т.к., например, для наибольшего числа десятков и наименьшего числа единиц, получим число 91, но здесь k=9, следовательно, k>9, что не возможно.

И так, работая над поиском ответа на вопрос: может ли сумму получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше суммы исходных чисел, заключаем, что нет, такая ситуация не возможна.

В заключении отметим, что работая с одаренными школьниками над задачами по теории чисел мы одновременно готовимся в успешному выполнению задачи №20 ЕГЭ по математике, что также немаловажно, учитывая, то что большинство наших слушателей уже в 2017 году заканчивают школу, и сейчас - время подготовки к одному из, наверное, самых «взрослых» экзаменов в своей, еще совсем юной, жизни.

Список литературы

1. *Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.*
2. *Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). — М., МЦНМО, 2011.*
3. *Сикорская Г.А. Профильная школа. Элективные курсы. Часть II. Математика : учебное пособие в трех частях / Г.А. Сикорская. – Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ ; РАО ЮУ НОЦ. – Часть II. – 2008. – 369 с.*
4. *Фалигин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.А. Фалин, А.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 367с.: ил. – (Поступаем в вуз) ISBN 5-94774-451-1*