

ОБЗОР МЕТОДОВ ОТЫСКАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛОВ В ГРАФЕ

Носов В.В., Орлов М.С.

Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Первая работа по теории графов, принадлежавшая известному швейцарскому математику Л. Эйлеру, появилась в 1736 г. Вначале теория графов казалась довольно незначительным разделом математики, так как она имела дело в основном с математическими развлечениями и головоломками.

В последние годы особую важность приобрели разделы математики, которые имеют отношение к развитию цифровых устройств, цифровой связи и цифровых вычислительных машин. Базой для преподавания этих дисциплин наряду с классическими методами анализа непрерывных физических моделей стали алгебраические, логические и комбинаторные методы исследования различных моделей дискретной математики.

В настоящее время, с развитием научно-технического прогресса, изучение теории графов обрело актуальность в связи с применением при разработке эффективных алгоритмов оптимизации тех или иных процессов.

Название «гамильтонов цикл» произошло от задачи «Кругосветное путешествие» предложенной ирландским математиком Вильямом Гамильтоном в 1859 году. Нужно было, выйдя из исходной вершины графа, обойти все его вершины и вернуться в исходную точку. Граф представлял собой укладку додекаэдра, каждой из 20 вершин графа было приписано название крупного города мира.

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа по одному разу, то такой цикл называется гамильтоновым циклом, а граф называется гамильтоновым графом. Граф, который содержит простой путь, проходящий через каждую его вершину, называется полугамильтоновым. Это определение можно распространить на ориентированные графы, если путь считать ориентированным.

Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа. Ясно, что гамильтоновым может быть только связный граф и, что всякий гамильтонов граф является полугамильтоновым. Заметим, что гамильтонов цикл существует далеко не в каждом графе.

Любой граф G можно превратить в гамильтонов граф, добавив достаточное количество вершин. Для этого, например, достаточно к вершинам v_1, \dots, v_p графа G добавить вершины u_1, \dots, u_p и множество ребер $\{(v_i, u_i)\} \{(u_i, v_{i+1})\}$.

Степенью вершины v называется число ребер $d(v)$, инцидентных ей, при этом петля учитывается дважды. В случае ориентированного графа различают степень $do(v)$ по выходящим дугам и $di(v)$ – по входящим.

Рассмотрим методы отыскания гамильтоновых циклов в графе.

Алгебраические методы определения гамильтоновых циклов не могут быть применены с более чем несколькими десятками вершин, так как они

требуют слишком большого времени работы и большой памяти компьютера. Однако неявный метод перебора имеет для большинства типов графов очень небольшой показатель роста времени вычислений в зависимости от числа вершин. Он может быть использован для нахождения гамильтоновых циклов в очень больших графах. Этот метод включает в себя построение всех простых цепей с помощью последовательного перемножения матриц. «Внутреннее произведение вершин» цепи $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$ определяется как выражение вида $x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{k-1}$, не содержащее две концевые вершины x_1 и x_k . «Модифицированная матрица смежности» $B = [\beta(i, j)]$ – это $(n \times n)$ – матрица, в которой $\beta(i, j) = x_j$, если существует дуга из x_i в x_j и нуль в противном случае. Предположим, что есть матрица

$$PL = [pL(i, j)],$$

где $pL(i, j)$ – сумма внутренних произведений всех простых цепей длины $L (L \geq 1)$ между вершинами x_i и x_j для $x_i \neq x_j$. Положим $pL(i, i) = 0$ для всех i . Обычное алгебраическое произведение матриц определяется как

$$B \cdot PL = P'L + l = [p'L + l(s, t)],$$

т.е. $p'L + l(s, t)$ является суммой внутренних произведений всех цепей из x_s в x_t длины $l + 1$. Так как все цепи из x_k в x_t , представленные внутренними произведениями из $pL(k, t)$, являются простыми, то среди цепей

$$p'l + l(s, t) = \sum_k \beta(s, k) \cdot pl(k, t),$$

получающихся из указанного выражения, не являются простыми лишь те, внутренние произведения которых в $pL(k, t)$ содержат вершину x_s . Таким образом, если из $p'L + l(s, t)$ исключить все слагаемые, содержащие x_s , то получим $pL + l(s, t)$. Матрица $PL + l = [pL + l(s, t)]$, все диагональные элементы которой равны 0, является тогда матрицей всех простых цепей длины $L + 1$.

Вычисляя затем $B \cdot PL + 1$, находим $PL + 2$ и т.д., пока не будет построена матрица P_{n-1} , дающая все гамильтоновы цепи (имеющие длину $n-1$) между всеми парами вершин. Гамильтоновы циклы получаются тогда сразу из цепей в P_{n-1} и тех дуг из G , которые соединяют начальную и конечную вершины каждой цепи. С другой стороны, гамильтоновы циклы даются членами внутреннего произведения вершин, стоящими в любой диагональной ячейке матрицы $B \cdot P_{n-1}$ (все диагональные элементы этой матрицы одинаковые).

Очевидно, что в качестве начального значения матрицы P следует взять матрицу смежности A графа, положив все ее диагональные элементы равными нулю.

Недостатки этого метода совершенно очевидны. В процессе умножения матриц каждый элемент матрицы PL будет состоять из большего числа членов вплоть до некоторого критического значения L , после которого число членов снова начнет уменьшаться. Это происходит вследствие того, что для малых значений L и для графов, обычно встречающихся на практике, число цепей длины $L + 1$, как правило, больше, чем число цепей длины L , а для больших значений L имеет место обратная картина. Кроме того, так как длина каждого

члена внутреннего произведения вершин увеличивается на единицу, когда L увеличивается на единицу, то объем памяти, необходимый для хранения матрицы PL , растет очень быстро вплоть до максимума при некотором критическом значении L , после которого этот объем снова начинает уменьшаться.

Небольшая модификация вышеприведенного метода позволяет во много раз уменьшить необходимый объем памяти и время вычислений. Так как нас интересуют только гамильтоновы циклы и, как было отмечено выше, они могут быть получены из членов внутреннего произведения любой диагональной ячейки матрицы $B \cdot Pn - 1$, то необходимо знать только элемент $pn - l(1,1)$. При этом на каждом этапе не обязательно вычислять и хранить всю матрицу PL , достаточно лишь найти первый столбец PL . Эта модификация уменьшает необходимый объем памяти и время вычислений в n раз. Однако даже при использовании этой модификации программа для ЭВМ, написанная на языке $PL/1$, который позволяет строчную обработку литер и переменное распределение памяти, не была способна найти все гамильтоновы циклы в неориентированных графах с более чем примерно 20 вершинами и средним значением степени вершины, большим 4.

В противоположность алгебраическим методам метод перебора имеет дело с одной цепью, непрерывно продлеваемой вплоть до момента, когда либо получается гамильтонов цикл, либо становится ясно, что эта цепь не может привести к гамильтонову циклу. Тогда цепь модифицируется некоторым систематическим способом (который гарантирует, что, в конце концов, будут исчерпаны все возможности), после чего продолжается поиск гамильтонова цикла. В этом способе для поиска требуется очень небольшой объем памяти и за один раз находится один гамильтонов цикл.

Следующая схема перебора, использующая обычную технику возвращения, была первоначально предложена Робертсом и Флоресом. Начинают с построения $(k \times n)$ -матрицы $M = [mij]$, где элемент mij есть i -я вершина, для которой в графе $G(X, \Gamma)$ существует дуга (xj, xq) . Вершины xq во множестве $\Gamma(xj)$ можно упорядочить произвольно, образовав элементы j -го столбца матрицы M . Число строк k матрицы M будет равно наибольшей полустепени исхода вершины.

Метод состоит в следующем. Некоторая начальная вершина (скажем, xl) выбирается в качестве отправной и образует первый элемент множества S , которое каждый раз будет хранить уже найденные вершины строящейся цепи. К S добавляется первая вершина (например, вершина a) в столбце xl . Затем к множеству S добавляется первая возможная вершина (например, вершина b) в столбце a , потом добавляется к S первая возможная вершина (например, вершина c) в столбце b и т.д. Под «возможной» вершиной понимается вершина, еще не принадлежащая S . Существуют две причины, препятствующие включению некоторой вершины на шаге r во множество $S = \{xl, a, b, c, \dots, xr - 1, xr\}$:

1) В столбце xr нет возможной вершины.

2) Цепь, определяемая последовательностью вершин в S , имеет длину $n-1$, т.е. является гамильтоновой цепью.

В случае 2) возможны следующие случаи:

а) В графе G существует дуга (xr, xl) , и поэтому найден гамильтонов цикл.

б) Дуга (xr, xl) не существует и не может быть получен никакой гамильтонов цикл.

В случаях (1) и (2б) следует прибегнуть к возвращению, в то время как в случае (2а) можно прекратить поиск и напечатать результат (если требуется найти только один гамильтонов цикл), или (если нужны все такие циклы) произвести печать и прибегнуть к возвращению.

Возвращение состоит в удалении последней включенной вершины xr из S , после чего остается множество $S = \{xl, a, b, c, \dots, xr-1\}$, и добавлении к S первой возможной вершины, следующей за xr , в столбце $xr-l$ матрицы M . Если не существует никакой возможной вершины, делается следующий шаг возвращения и т.д.

Поиск заканчивается в том случае, когда множество S состоит только из вершины xl и не существует никакой возможной вершины, которую можно добавить к S , так что шаг возвращения делает множество S пустым. Гамильтоновы циклы, найденные к этому моменту, являются тогда всеми гамильтоновыми циклами, существующими в графе.

Рассмотрим улучшение основного переборного метода Робертса и Флореса. Допустим, что на некотором этапе поиска построенная цепь задается множеством $S = \{x1, x2, \dots, xr\}$ и что следующей вершиной, которую предполагается добавить к S , является $x^* \in S$. Рассмотрим теперь две следующие ситуации, в которых вершина является изолированной в подграфе, остающемся после удаления из $G(X, \Gamma)$ всех вершин, образующих построенную до этого цепь.

а) Если существует такая вершина $x \in X \setminus S$, что $x \in \Gamma(xr)$ и $\Gamma-l(x) \subseteq S$, то, добавляя к S любую вершину x^* , отличную от x , мы не сможем в последующем достигнуть вершины x ни из какой конечной вершины построенной цепи, и, значит, эта цепь не сможет привести нас к построению гамильтонова цикла. Таким образом, в этом случае x является единственной вершиной, которую можно добавить к S для продолжения цепи.

б) Если существует такая вершина $x \in X \setminus S$, что $x \in \Gamma-l(xl)$ и $\Gamma(x) \subset S \cup \{x^*\}$ для некоторой другой вершины x^* , то x^* не может быть добавлена к S , так как тогда в остающемся подграфе не может существовать никакой цепи между x и xl . Цепь, определяемая множеством $S \cup \{x^*\}$, не может поэтому привести к гамильтонову циклу, а в качестве кандидата на добавление к множеству S следует рассмотреть другую вершину, отличную от x^* .

Проверка условий (а) и (б) будет, конечно, замедлять итеративную процедуру, и для небольших графов (менее чем с 20 вершинами) не получается

никакого улучшения первоначального алгоритма Робертса и Флореса. Но для больших графов эта проверка приводит к заметному сокращению необходимого времени вычислений, уменьшая его обычно в 2 или более раз.

Таким образом, из рассмотренных методов отыскания гамильтоновых циклов в графе наиболее эффективным является улучшенный метод перебора Робертса и Флореса.

Список литературы

- 1. Харари Ф. Теория графов / Пер.с англ. и предисл. В. П. Козырева. Под ред. Г. П. Гаврилова. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003. 296 с.*
- 2. Мельников О.И. Теория графов в занимательных задачах. Изд.3, испр. и доп. 2009. 232 с.*
- 3. Дистель Р. Теория графов Пер. с англ. - Новосибирск: Издательство института математики, 2002. 336 с.*
- 4. Курсанов М. Н. Графы в Maple. М.: Физматлит, 2007. 168 с.*

