Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Университетский колледж
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

Предметно-цикловая комиссия математических дисциплин

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Методические указания

Составители: Ю. М. Каримова, О. А. Лукерина

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам среднего профессионального образования по специальностям 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), 38.02.07 Банковское дело, 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности, 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям)

Оренбург
2021

УДК 517
ББК 22.14
О75

Рецензент – доцент, кандидат педагогических наук А. С. Колбинцева

О75 **Основы математического анализа**: методические указания/составители Ю. М. Каримова, О. А. Лукерина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 69 с.

В методических указаниях рассмотрены избранные вопросы, касающиеся раздела математического анализа в курсе математики. Каждая тема представлена теоретическим материалом и заданиями для самостоятельного решения.

Методические указания «Основы математического анализа» предназначены для обучающихся колледжа по специальностям 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), 38.02.07 Банковское дело, 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем, 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям).

УДК 517
ББК 22.14

Содержание

Введение

В данных методических указаниях рассмотрен ряд вопросов математического анализа, которые являются наиболее сложными для усвоения обучающимися. Это предел функции и непрерывность, дифференциальное исчисление функции одной переменной, интегральное исчисление функции одной переменной, элементы теории рядов. Все эти вопросы входят в программу обязательного изучения специальностей 21.02.05 Земельно-имущественные отношения, 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям), 38.02.07 Банковское дело, 10.02.05 Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем, 13.02.07 Электроснабжение (по отраслям).

Цель данных методических указаний состоит в получении обучающимися прочных теоретических знаний и практических навыков в области высшей математики. Такая подготовка необходима для успешного усвоения многих специальных дисциплин. Исследование многих процессов в промышленной технологии и экономике связано с разработкой соответствующих математических моделей, для успешного исследования которых будущий специалист должен получить достаточно серьёзную математическую подготовку.

Задачей методических указаний является изучение фундаментальных разделов высшей математики, которое составит основу математических знаний обучающихся. Прочное усвоение современных математических методов позволит будущему специалисту решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

1 Пределы

1.1 Последовательность

Среди всевозможных функций, которые рассматриваются в математике, важнейшую роль играют числовые функции действительного переменного, т.е. функции, определенные на некоторых множествах действительных чисел. Частным случаем указанных функций являются числовые последовательности.

Опр. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$ называют функцией натурального аргумента или ***числовой последовательностью*** и обозначают: $y = f(n)$, или y_1, y_2, y_3..., y_n или $y(n)$ или a_1 , a_2,…, an… или $a(n)$.

Способы задания последовательностей:

1. Словесно (описание словами, без указания формулы)

2. Аналитический способ (формулой)

3.Рекуррентный способ задания последовательности

Примеры:

1. $y_n = n^2$ - аналитическое задание последовательности

1,4,9,16,…, n^2, …, где n – номер элемента последовательности

$y_1 = 1^2 = 1$, $y_2 = 2^2 = 4$ и т.д.

2. $y_n = C$ - последовательность C, C, C, …., C, …. . Такую последовательность называют постоянной (или стационарной).

3. Рекуррентный способ задания последовательности - указывается правило, позволяющее вычислить последующий элемент последовательности, если известны предыдущие.

$a_{1,} = a$, $a_{n+1} = a_n + d$ - арифметическая прогрессия

$b_{1,} = b$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$ - геометрическая прогрессия

Примеры:

1. Вычислите y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 и запишите в виде ряда чисел:

а) $y_n = 3 - 2n$

Решение

$y_1 = 3 - 2 \cdot 1 = 1$

$y_2=3-2\cdot 2=-1$

$y_3=3-2\cdot 3=-3$

$y_4=3-2\cdot 4=-5$

$y_5=3-2\cdot 5=-7$

1; -1; -3; -5; -7

Самостоятельно решить оставшиеся примеры

б) $y_n = 2n^2 - n$

в) $y_n = n^3 - 1$

г) $y_n = (-1)^n$

д) $y_n = \dfrac{(-2)^n}{n^2+1}$

1.2 Предел последовательности

Рассмотрим числовую последовательность (y_n): $1; \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots. \dfrac{1}{2^n}, \ldots.$

Если изобразить элементы данной числовой последовательностей точками на координатной прямой, то можно заметить, что все числа последовательности (y_n) «сгущаются» около точки 0. Говорят, последовательность сходится к числу 0. Эту точку называют пределом последовательности.

Опр. Число b называется ***пределом последовательности*** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержится все элементы последовательности, начиная с некоторого номера.

Обозначают: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Читают: Предел последовательности y_n при n стремящемся к бесконечности равен b.

Теорема 1 (необходимое условие сходимости произвольной числовой последовательности) Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Теорема 2 (достаточное условие сходимости последовательности) Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.

Теорема 3 (об арифметических операциях над пределами)

Если $lim_{n\to\infty} a_n = a \quad lim_{n\to\infty} b_n = a$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \ a_n \pm b_n \ = a \pm b$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \ a_n \cdot b_n \ = a \cdot b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \ \dfrac{a_n}{b_n} \ = \dfrac{a}{b}$

Примеры:

1 Вычислить $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{x^3-1}$

Решение: Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают. В этом случае говорят, что имеет место неопределённость вида ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель на x^3 (наивысшую степень x в данной дроби):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x^3})} = 2,$$

так как $1/x^2$ и $1/x^3$ при $x \to \infty$ стремится к нулю.

2 Найти $\lim_{a\to 0} \frac{\sin x}{a}$.

Решение: Здесь числитель и знаменатель не имеют предела. Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем на знак предела. Имеем:

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sin 2a}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{2 \sin 2a}{2a} = 2\lim_{a\to 0} \frac{\sin 2a}{2a}.$$

Учитывая, что если $a \to 0$, то и $2a \to 0$, получим

$$\lim_{a\to 0} \frac{\sin 2a}{a} = 2\lim_{2a\to 0} \frac{\sin 2a}{2a} = 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 2 * 1 = 2.$$

3 Найти $\lim_{x\to\infty} (\frac{x}{x+1})^x$

Решение: Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty} (\frac{x}{x+1})^x = \lim_{x\to\infty} (\frac{x}{1+\frac{1}{x}})^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x} = \frac{1}{e}$$

4 Найти $\lim_{x\to\infty} (x^2 - 7x + 4)$

Решение: Для нахождения предела данной функции заменим аргумент x его предельным значением:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 * 3 + 4 = -8$$

1.3 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Опр. Последовательность $\{a_n\}$ - называется бесконечно-малой последовательностью, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Свойства бесконечно-малых последовательностей:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно-малых последовательностей является бесконечно-малой последовательностью.

2. Произведение постоянной величины на бесконечно-малую последовательность есть бесконечно-малая последовательность.

3. Произведение конечного числа бесконечно-малых последовательностей является бесконечно-малой последовательностью.

Пример: следующие числовые последовательности являются бесконечно-малыми: $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n = \frac{\ln n}{n!}$, $x_n = e^{-n}$.

Опр. Последовательность, предел которой равен бесконечности, называется бесконечно-большой последовательностью.

Свойства бесконечно-больших последовательностей:

1. Если $\{a_n\}$ - бесконечно-большая последовательность и $a_n \neq 0,\ \forall n \in N$, то $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ бесконечно-малая последовательность.

2. Если $\{a_n\}$ - бесконечно-малая последовательность и $a_n \neq 0,\ \forall n \in N$, то $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ бесконечно-большая последовательность.

Пример: следующие числовые последовательности являются бесконечно-большими: $x_n = n$, $x_n = \ln n$, $x_n = e^n - 208$.

1.4 Функция: основные понятия. Предел функции

Опр. Действительной функцией одной действительной переменной называют отображение f некоторого числового множества $D(f) \in$ R во множество R действительных чисел.

При этом множество $D(f)$ называют ***областью определения*** функции f.

Обозначение функции действительной переменной: $f{:}D(f) \rightarrow R$или $y=f(x)$.

Если при отображении f числу $x_0 \in D(f)$ соответствует число $y_0 \in$R, то y_0называют ***значением функции в точке x_0*** и обозначают $y_0=f(x_0)$.

Множество вида $\{y \in R|\ y=f(x), x \in D(f)=\ E(f)\}$ называют ***множеством значений*** функции.

Функция считается заданной, если:

1)указана ее область определения;

2)задан закон соответствия.

Опр. Графиком функции $y = f(x)$ называют множество Γ_fупорядоченных пар $(x;\ y)$, где $x \in D(f)$, а $y= f(x)$, то есть: $\Gamma_f= \{(x,y)|x \in D(f), y=f(x)\}$.

Геометрически график функции $y = f(x)$ - это множество точек плоскости xOy с координатами $\{x,f(x)\}$.

Опр. Точку x_0 называют предельной точкой множества A, если в любой ее окрестности содержится бесконечное множество точек из A.

Теорема *(характеристическое свойство предельной точки).* Точка x_0является предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда существует такая последовательность (x_n) точек множества A, что $x_n \rightarrow x_0$и $x_n \rightarrow x_0$.

Заметим, что предельная точка множества A может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Введем понятие предела функции в точке, который описывает ее поведение в некоторой окрестности предельной точки и не зависит от значения функции в самой точке. Дадим разные определения этого понятия.

Пусть задана функция $y = f(x)$ и пусть x_0 - предельная точка ее области определения $D(f)$.

Опр. (на «языке окрестностей»). Число $a \in$ R называют пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой окрестности $U(a)$ найдется проколотая окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in D(f)$ и $x \in U(x_0)$ значения функции $f(x) \in U(a)$.

Запишем это определение коротко:

$a \in R, a = \log_{n\to\infty} f(x) \overset{def}{} (\in U(a))(\exists U \in (x_0))(\forall x \in D(f) \cap U(x_0)) => f(x) \in U(a)$.

Опр. (Гейне на «языке последовательностей»).

$a \in$ R называют пределом функции $y=f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \in D(f)$, $x_n \to x_0$и последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к a.

Коротко:$a \in R, a = \lim_{x\to\infty} f(x) \overset{def}{} (\forall (x_n): x_n \in D(f), x_n \to x_0, x_n \to x_0) => f(x_n) \to a$

Опр. (Коши или на «языке$\varepsilon - \delta$»).Число $a \in R$ называют *пределом функции* $y = f(x)$при $x_n \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$найдется$\delta > 0$ такое, что для всех $x \in D(f)$и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \varepsilon$выполняется неравенство $|f(x) - a| < \delta$.

$a \in R$, $a = \lim_{n\to\infty} f(x) <=> (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$

$(\forall x \in D(f): 0 < |x - x_0| < \varepsilon => |f(x) - a| < \delta$.

Определим свойства предела функции в точке:

Теорема 1(*о единственности предела функции)*. Если функция имеет предел в точке, то он единственный.

Теорема 2 *(об ограниченности функции).* Если функция имеет предел в точке, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Теорема 3 (*о предельном переходе в неравенствах).* Если в некоторой проколотой окрестности т. x_0 выполняется неравенство $f(x) < g(x)$ и существуют пределы этих функций в т. x_0 to$\lim_{n\to\infty} f(x) < \lim_{n\to\infty} g(x)$

Теорема 4 *(о пределе промежуточной функции).* Если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$ и существуют пределы $\lim\varphi(x) = \lim g(x) = a$, *то и* $\lim f(x) = a$.

Теорема 5 (*об арифметических операциях над пределами функций*). Если $\lim_{x\to x0} f(x) = a$и $\lim_{x\to x0} g(x) = b$, где $a \in$R, $b \in$R , то существуют пределы суммы, произведения и частного этих функций. В частности, постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Теорема 6 *(о пределе сложной функции).* Пусть задана сложная функция $y=f(g(x))$(композиция двух функций $y=f(z)$ и $z=g(x)$)и существуют пределы $\lim_{x\to x0} g(x)$ $=z_0$и $\lim_{x\to x0} f(x)$ $=f(z_0)$.Тогда существует предел сложной функции $\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(z_0)$.

Опр. Функцию $y =f(x)$ называют ***бесконечно малой*** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0.$$

Опр. Функцию $y =f(x)$ называют ***бесконечно большой*** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty .$$

Теорема 7 (*о связи бесконечно малых и бесконечно больших функций).* Функция $y = f(x)$ является бесконечно малой в точке x_0 (при условии, что $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности $U(x_0)$, тогда и только тогда, когда функция $y=\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая в точке x_0.

Пусть задана функция $y =f(x)$.

Опр. (на «языке пределов»). Функцию $y=f(x)$ называют непрерывной в точке x_0, если $\lim f(x)=f(x_0)$.

Из определения 1 следует, что если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, то выполняются следующие условия:

1) $x_0 \in D(f)$, то есть $\exists f(x_0)$,

2) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$, то есть $\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x)= \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x)$,

3) $\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Опр. (на «языке окрестностей») Функцию $y=f(x)$ называют непрерывной в точке x_0, если для любой окрестности $U(f(x_0))$ найдется окрестность $U(x_0)$ такая, что для всех $x \in D(f)$ и $x\in U(x_0)$ соответствующие значения функции $f(x)\in$

$U(f(x_0))$.Запишем это определение коротко: *$y=f(x)$ - непрерывна в точке* $x_0 <=> (\forall U(f(x_0)))(\exists U(x_0))(\forall x \in D(f) \cap U(x_0)) => f(x) \in U(f(x_0))$.

Опр. (Гейне или на «языке последовательностей») Функцию $y=f(x)$ называют непрерывной в точке x_0, если для любой последовательности (x_n) такой, что $x_n \in D(f)$ и , $x_n \to x_0$, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))$ сходится к $f(x_0)$.

$y=f(x)$-непрерывна в точке $x_0 <=> (\forall (x_n): x_n \in D(f), x_n \to x_0 => f(x_n) \to f(x_0)$

Опр. (Коши или на «языке $\varepsilon - \delta$») Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке x_0,если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta >0$ такое, что для всех $x \in D(f)$и удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Опр. Число $a \in R$ называют ***пределом функции*** $y = f(x)$при $x_n \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta >0$ такое, что для всех $x \in D(f)$и удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0\backslash < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Коротко: *$y=f(x)$ - непрерывна в точке* $x_0 <=> (\forall \varepsilon >0)(\exists \delta >0)(\forall x \in D(f): |x-x_0| < \delta => |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

Опр. Разность x-x_0 двух значений аргумента называют приращением аргумента в точке x_0 и обозначают $\Delta x = x$-x_0.

Опр. Разность $f(x) - f(x_0)$двух значений функции называют приращением функции в точке x_0 и обозначают $\Delta y = \Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)$.

Опр. (на «языке приращений»). Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке x_0,, если бесконечно малому приращению аргумента x соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $lim \Delta y = 0$.

Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x_0 <=> lim \Delta y = 0$.

Опр. Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной на множестве D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 8 *(об арифметических операциях над непрерывными функциями)*

Если функции $y=f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке x_0, то алгебраическая сумма, произведение и частное (при условии, что $g(x) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

Примеры:

Вычислить:

1 $lim_{x\to 2}(6x^3+2x^2-3x+7)$

Решение:

Для вычисления предела многочлена при $x\to x_0$надо вместо переменной x подставить значение x_0, к которому она стремится, и подсчитать, используя соответствующие теоретические положения.

$$\lim_{x\to 2}\ 6x^3+2x^2-3x+7\ \ = 6\lim_{x\to 2}x^3-3\lim_{x\to 2}x^2+$$

$$+2\lim_{x\to 2}x+7=6\cdot 2^3+2\cdot 2^2-3\cdot 2+7=57$$

2 $lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

Решение:

Используем теоремы о пределе отношения и пределе суммы, а затем подставим $x=3$ в формулу дроби.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}=\frac{9-4}{9-9+2}=\frac{5}{2}$$

$$=2{,}5.$$

3 $lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^3+3x+3}$

Решение:

$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x-3}{x^3+3x+3}=\frac{\lim_{x\to 3}(x^3-2x-3)}{\lim_{x\to 3}(x^3+3x+3)}=\frac{3^3-2\cdot 3-3}{3^3+3\cdot 3+3}=\frac{18}{39}$.

4 $lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{x+1}$

Решение:

При подстановке вместо переменной x бесконечности, получаем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, чтобы раскрыть её необходимо числитель и знаменатель разделить на старшую степень переменнойx и после применим теорему о пределе частного, а затем теорему о пределе суммы.

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\ 4+\frac{2}{x}}{\lim_{x\to\infty}\ 1+\frac{1}{x}}=\frac{4+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{4+0}{1+0}=4.$

В ситуации, когда числитель и знаменатель дроби стремится к нулю. Тогда говорят, что имеет место неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для раскрытия неопределённости такого вида необходимо числитель и знаменатель разложить на множители.

Теорема 9 (*о непрерывности сложной функции).* Если функция $z=g(x)$непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(z)$ непрерывна в соответствующей точке $z_0=g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Опр. Основными элементарными функциями называют функции вида: постоянную функцию $y=c$, степенную функцию $y=x^a(\alpha \in$ R),показательную функцию $y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$, логарифмическую функцию $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$, тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ и обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

Опр. Функцию называют элементарной, если она образована из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций или с помощью конечного числа композиций функций (образования сложных функций). В противном случае функцию называют неэлементарной.

Теорема 10. Любая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

1.5 Замечательные пределы. Точки разрыва

Опр. Первым замечательным пределом называется предел отношения синуса бесконечно малой дуги к той же дуге, выраженной в радианной мере: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Замечание: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tgx}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{arctgx}=1$.

Свойства: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgax}{bx}=\frac{a}{b}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$

Примеры эквивалентных бесконечно малых величин

$\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(x+1) \sim x$, $(1+x)^m \sim 1 + m \cdot x$, $\arcsin x \sim x$,

$arctgx \sim x$, $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$

Примеры:

1 Вычислить $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x}$.

Решение: $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 4x}{\sin 8x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{4x} \cdot \dfrac{8x}{\sin 8x} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

2 Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$

Решение: Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для ее раскрытия воспользуемся теоремой о замене бесконечно малых функций эквивалентными им бесконечно малыми.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \to 0} \frac{8x}{4x} = 2$$

Опр. Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Непосредственное вычисление предела приводит к неопределенности вида $[1^\infty]$.

Пример: Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$

Решение: Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3+3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-3}{3}}\right)^{\frac{2x-3}{3}\cdot\frac{3}{2x-3}\cdot(2-5x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2-5x)}{2x-3}}=e^{-\frac{15}{2}}$$

Непрерывность функции

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. определена в точке x_0;
2. имеет конечный предел при $x\to x_0$;
3. этот предел равен значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x\to\infty}\Delta y=0$.

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если для каждой окрестности $U(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что для

$$\forall x:\begin{cases} x\in D_f \\ x\in U(x_0)\end{cases}\Rightarrow f(x)\in U(f(x_0)).$$

Опр. $f(x)$ - непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда когда

$$\forall\xi(\xi>0)\ \exists\delta(\delta>0)\ \forall x:\begin{cases} x\in Df \\ |x-x_0|<\delta\end{cases}\Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\xi.$$

Теорема 1. Постоянная функция $f(x)=c$ является непрерывной в любой точке числовой оси, согласно определению непрерывности функции в точке.

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке, то их сумма, произведение и частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) являются функциями, непрерывными в этой точке.

Теорема 3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Опр. Функция называется непрерывной на некотором промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка. Все элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены.

Точки разрыва

Опр. Точки разрыва функции – это точки, в которых функция не является непрерывной.

Опр. Точка разрыва x_0 - называется точкой разрыва первого рода, если в этой точке существуют и конечны оба односторонних предела.

Опр. Точка разрыва первого рода – называется точкой устранимого разрыва, если оба односторонних предела конечны и равны между собой, но не равны значению функции в этой точке.

Опр. Точка разрыва первого рода – называется точкой неустранимого разрыва, если оба односторонних предела конечны, но не равны между собой.

Опр. Точка разрыва, в которой хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности, называется точкой разрыва второго рода .

<table>
<tr><th colspan="3">Точки разрыва</th></tr>
<tr><td colspan="2">1 род
$\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ существуют и конечны</td><td rowspan="2">2 род
Хотя бы один из $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ не существует или равен ∞</td></tr>
<tr><td>Неустранимый разрыв
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$</td><td>Устранимый разрыв
$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x)$</td></tr>
</table>

Таблица 1 Точки разрыва

Примеры:

1. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график

2. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ (x-1)^2, & 0 < x \le 2 \\ 5-x, & x > 2 \end{cases}$

Решение: Данная функция является неэлементарной, так как на разных интервалах представлена различными аналитическими выражениями. Эта функция определена на интервалах $(-\infty;2]$, $(0;2]$ и $(2;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Внутри каждого интервала указанные элементарные функции не имеют точек разрыва, следовательно, разрыв возможен только в точках перехода от одного аналитического выражения к другому, т.е. в точках x=0 и x=2.

Для точки x=0 имеем:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2=0,\ \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)^2=1,\ f(0)=0$$

Так как, односторонние пределы не равны между собой, то функция в точке x=0 имеет разрыв первого рода.

Для точки x=2 находим:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1,\ \lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(5-x)=3,\ f(2)=1$$

Так как, односторонние пределы не равны между собой, то функция в точке x=2 имеет разрыв первого рода.

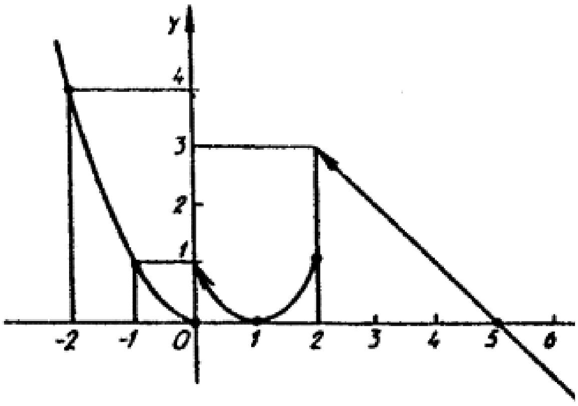

Рисунок 1- График функции y=f(x)

2. Исследовать данную функцию на непрерывность в указанных точках $f(x)=8^{\frac{1}{x-3}}+1$, x=3, x=4

Решение: Для точки x=3 имеем:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 8^{-\infty}+1 = 1,\ \lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 8^{\infty}+1 = \infty$$

т.е. в точке x=3 функция имеет разрыв второго рода (терпит бесконечный разрыв).

Для точки x=4 имеем:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 9,\ \lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = 9$$

$$f(4) = 9$$

Следовательно, в точке x=4 функция непрерывна.

1.6 Задания для самостоятельного решения

Вычислите пределы:

1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{x-2}$;

2) $\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x^{2-2x+1}}$;

3) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^{2-5x+4}}$;

4) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$;

5) $\lim_{x\to \infty}\frac{5x-2}{x^2-x+4}$;

6) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$;

7) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^3+4}{x^2-3}$;

8) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

9) $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;

10) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

2 Дифференциальное исчисление

2.1 Определение производной функции.

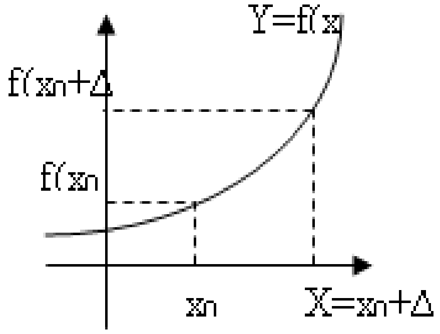

Рисунок 2 - Определение производной функции

Опр. Точку x_0 называют внутренней точкой множества D, если $\exists$ окрестность этой точки, которая целиком содержится в D.

Пусть x_0 - внутренняя точка, а x - любая точка области определения функции $y = f(x)$, отличная от x_0 (рисунок 2). Тогда разность $x - x_0 = \Delta x$ называют приращением аргумента в точке x_0, а разность $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$- соответствующим ему приращением функции в этой точке.

Опр. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют число, равное пределу отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x \to 0$ и обозначается: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$.

Формулы дифференцирования:

1) $c' = 0$
2) $x' = 1$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$
4) $(c \cdot x)' = c$
5) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
7) $(a^x)' = a^x \ln a$

8) $(e^x)' = e^x$

9) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

10) $(\sin x)' = \cos x$

11) $(\cos x)' = -\sin x$

12) $(tgx)' = \dfrac{1}{Cos^2 x}$

13) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{Sin^2 x}$

14) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

17) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

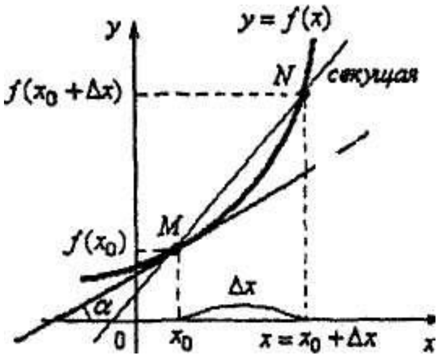

Рисунок 3- Геометрический смысл производной

Опр. Касательной к графику *y=f(x)* в точке *M,* называют прямую, к которой стремится секущая *MN*, когда точка *N* по графику приближается к т.*M* (рисунок 3).

Геометрический смысл производной: Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в точке с абсциссой x_0 $\boldsymbol{f'(x_0)=k_{кас.}= tg\ \alpha}$

Уравнение касательной: $y=f(x_0)+ f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Пусть прямолинейное движение материальной точки описывается функцией *s=s(t)*,где *s=s(t)*-координата точки в момент времени *t* 1 .

Опр. Мгновенной скоростью в момент времени t_0 называется предел средней скорости за промежуток времени $[t_0 ; t_0+\Delta t]$ при условии, что $\Delta t\to 0$ и обозначается $v(t_0)$.

Таким образом, $v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0} v_{cp}$, так как $\lim_{\Delta t\to 0} v_{cp}= \lim_{\Delta t\to 0}((s(t_0+\Delta t)-s(t_0))/\Delta t)= \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta s/\Delta t)=s'(t_0)$, *то* $v(t_0)=s'(t_0)$.

Механический смысл производной заключается в том, что производная от координаты точки по времени равна мгновенной скорости точки в данный момент времени при прямолинейном движении.

2.2 Вычисление производной функции

Опр. Функцию $y=f(x)$ называют дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде: $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$,

где A - некоторое действительное число, не зависящее от Δx, $\lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)=0$.

Опр. Функцию $y=f(x)$ называют дифференцируемой в области D, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Рассмотрим свойства дифференцируемых функций:

Теорема 1. Функция $y=f(x)$ дифференцируема в x_0 тогда и только тогда, когда $\exists f'(x_0)$.

Доказательство: 1(*необходимость)* Пусть $y=f(x)$ дифференцируема в $y=f(x)$ в x_0, тогда ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде: $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где A - некоторое действительное число, не зависящее от Δx, а $\lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x)=0$.

Найдем отношение $(\Delta y/\Delta x)= A+\alpha(\Delta x)$ и вычислим $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x)= \lim_{\Delta x\to 0}(A+\alpha(\Delta x))=A + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=A+0=A$.

Таким образом, $\exists \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x)=A \Rightarrow \exists f'(x_0)=A$.

2*(достаточность)* Пусть $\exists f'(x_0)$ это значит, что $\exists \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta y/\Delta x)= f'(x_0)$, т.е. по определению предела функции в точке $\forall\varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $\forall\Delta x{:}|\Delta x|<\delta \Rightarrow |(\Delta y/\Delta x)-f'(x_0)|<\varepsilon (1)$

Обозначим $(\Delta y/\Delta x)-f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$ (2) тогда условие (1) означает, что $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. А из условия (2) $(\Delta y/\Delta x)= f'(x_0)+ \alpha(\Delta x)$, или $\Delta y = f'(x_0)\Delta x+ \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $f'(x_0)$-некоторое действительное число, не зависящее от Δx, а $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

По определению это означает, что $y = f(x)$ дифференцируема в x_0.

Теорема доказана.

Следствие: Если $y=f(x)$ дифференцируема в x_0, то ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y= f'(x_0)\Delta x+ \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

Теорема 2. Если $y=f(x)$ дифференцируема в x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство: По условию $y=f(x)$ дифференцируема в x_0, тогда по следствию из теоремы 1: $\Delta y= f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. найдем $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=f(x_0) \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0+0=0$.т.к. $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,то по определению $y = f(x)$ непрерывна в x_0.

Теорема 3 *(правила дифференцирования).*Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в x_0, то их алгебраическая сумма, произведение и частное $(v(x)\neq 0)$ также дифференцируемы в этой точке, причем:

1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$;

2) $(u\cdot v)'=u'v+uv'$, в частности, $(c\cdot u)'=c\cdot u'$;

3) $(u/v)'=(u'\cdot v-u\cdot v')/v^2$.

Примеры. Вычислить производную:

1. $y=x^2-4x+3$

Решение

$y' = (x^2- 4x + 3)' = (x^2)'- (4x)' + (3)'$.

По формулам (1) и (2) формул дифференцирования (стр. 17) получим:

$y' = 2x - 4$.

2. $y = \sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^3}$

Решение

Вводя дробные и отрицательные показатели, преобразуем данную функцию: $y =x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{3}}- x^{-2} +\frac{1}{3}x^{-3}$.

Применяя формулу (2) и её частные случаи, получим:

$y = \frac{1}{2}x^{\frac{1-1}{2-1}}+5 - \frac{1}{3} x^{-\frac{1-1}{3-1}}$-(-2)$x^{-2-1}+\frac{(-3)}{3}x^{-3-1}=x^{-\frac{1}{2}}$ - $\frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}}+2x^{-3}$- x^{-4};

$y'=\frac{1}{2\ \overline{x}}$-$\frac{2}{x^3}$-$\frac{1}{x^4}$.

Теорема 4. Если функция $z=g(x)$ дифференцируема в x_0, а $y = f(z)$ дифференцируема в $z_0=g(x_0)$, то сложная функция $y=f(g(x))=F(x)$ дифференцируема в x_0, причем $F'(x)=f'(z_0)g'(x_0)$ или $y'_x=y'_z z'_x$ (производная сложной функции равна произведению производных от функций ее составляющих).

Примеры: Вычислить производную:

1. $y=(1+5x)^3$

Решение

Полагая 1+5x = z и $y=z^3$, применяя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

y'=$3z^2$(1+5x)'=$3(1+5x)^2$·5=$15(1+5x)^2$.

2. $y=sin\,3x$.

Решение

Полагая 3x=z, найдём, используя соответствующие формулы:

y'=$(\sin 3x)'$=$(\sin z)'$=$\cos z \cdot z'$=$\cos 3x \ \cdot 3$,

y'=3$\cos 3x$.

Опр. Если $y=f(x)$ дифференцируема в x_0, то произведение $f'(x_0)\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают: $dy= f'(x_0)\Delta x$.

Дифференциал функции есть главная часть приращения функции, линейная относительно Δx. геометрически дифференциал функции в x_0 есть приращение ординаты касательной к графику$y=f(x)$ в т. $M_0(x_0;\ f(x_0))$, когда абсцисса x_0 этой точки получает приращение $\Delta x\neq 0$. В приближенных вычислениях при достаточно малых приращениях $|\Delta x|$ аргумента полагают $\Delta y\approx dy$ и получают формулу для приближенных вычислений значений функции $f(x)\approx f(x_0)+dy$, где $dy= f'(x_0)\Delta x$.

2.3 Дифференциал функции

Опр. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Произведение производной функции в точке x_0 на приращение аргумента Δx называется дифференциалом функции в точке x_0.

$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

$dy = f'(x)\Delta x$ - I формула дифференциала функции

$dy = f'(x)dx$ - II формула дифференциала функции

Замечание: нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют дифференцированием функции.

Основные правила дифференцирования

Пусть функции $U = U(x)$ и $V = V(x)$ дифференцируемы в точке

1. Дифференциал константы равен нулю, т.е. $d(c) = 0$

2. Дифференциал суммы (разности) равен сумме (разности) дифференциалов, т.е. $d(U \cdot V) = dU + dV$

3. Дифференциал произведения находится по правилу: $d(U \cdot V) = U \cdot dV + V \cdot dU$

4. $d(c \cdot U) = c \cdot d(U)$ Говорят: «константа выносится за знак дифференциала»

5. Дифференциал дроби находится по правилу:

$$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{VdU - UdV}{V^2}, \quad V(x) \neq 0$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(\varphi(t))$

Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$.

Тогда существуют производные $x'(t)$ и $f'(x)$ и сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t, причем $y'(t) = [f(\varphi(t))]' = f'(x) \cdot x'(t)$. Следовательно, функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t и дифференциал в этой точке равен $dy(t) = y'(t) \cdot dt \Rightarrow dy = f'(x) \cdot dx$

Пример: Найти дифференциал функции $y = 7x^3 - x^2 \cdot tgx + e^x + 5$

Решение: $dy = d\left(7x^3\right) - d\left(x^2 \cdot tgx\right) + d\left(e^x\right) + d\left(5\right) = 7 \cdot 3 \cdot x^2 dx +$

$$+\left(-x^2\right) d\left(tgx\right) + tgx d\left(-x^2\right) + e^x dx + 0 = 21 \cdot x^2 dx - \frac{x^2}{\cos^2 x} dx -$$

$$-2 \cdot x \cdot tgx dx + e^x dx = dx\left(21 \cdot x^2 - \frac{x^2}{\cos^2 x} - 2 \cdot x \cdot tgx + e^x\right) = y'_x dx$$

2.4 Исследование функции с помощью производной

Теорема 1. Если $f\left(x\right)$ непрерывна на отрезке $\left[a;b\right]$ и дифференцируема в интервале $\left(a;b\right)$, то

1) при $f'\left(x\right) > 0,\ \ \forall x,\ \ x \in \left(a;b\right)$, $f\left(x\right)$ возрастает на $\left[a;b\right]$

2) при $f'\left(x\right) < 0,\ \ \forall x,\ \ x \in \left(a;b\right)$, $f\left(x\right)$ убывает $\left[a;b\right]$

3) при $f'\left(x\right) = 0,\ \ \forall x,\ \ x \in \left(a;b\right)$, $f\left(x\right)$ постоянная на $\left[a;b\right]$

Опр. x_0 - называется точкой максимума функции $f\left(x\right)$, если существует окрестность точки x_0, для всех точек x которой $f\left(x\right) < f\left(x_0\right)$.

Опр. x_0 - называется точкой минимума функции, если существует окрестность точки x_0 для всех точек x которой $f\left(x\right) > f\left(x_0\right)$.

Замечание: точки минимума и максимума называются точками экстремума.

Примеры:

1. Найти максимум и минимум функции $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$

Решение: $D_f = \left(-\infty;0\right) \cup \left(0;+\infty\right)$

$$y' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' = \frac{2x}{2} + 8 \cdot \left(-\frac{\left(x^2\right)'}{x^4}\right) = x - 8 \cdot \frac{2x}{x^4} = x - \frac{16}{x^3}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x - \frac{16}{x^3} = 0$$

$$\frac{x^4-16}{x^3}=0 \Rightarrow \begin{cases} x^4-16=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2-4)(x^2+4)=0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-4=0 \\ x^2+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \\ x \neq 0 \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+2)=0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$x_1 = 2$ или $x_2 = -2$

	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	-	0	+		-	0	+
y	↘	min	↗		↘	min	↗

$$y(-2)=\frac{(-2)^2}{2}+\frac{8}{(-2)^2}=\frac{4}{2}+\frac{8}{4}=4$$

$$y_{\min}(-2)=4$$

$$y(2)=\frac{2^2}{2}+\frac{8}{2^2}=\frac{4}{2}+\frac{8}{4}=4$$

$$y_{\min}(2)=4$$

2. Конденсатор имеет пластины прямоугольной формы. Периметр одной пластины равен 6 см. При каких размерах сторон пластины емкость конденсатора будет наибольшей? (Емкость прямо пропорциональна площади пластины)

$c=\frac{\varepsilon_0}{d}\cdot S$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$(Ф/м), d– расстояние между пластинами.

Решение: Пусть x см. одна сторона пластины, тогда (3-x) см. другая, а $S = x\cdot(3-x)$.

$$c=\frac{\varepsilon_0}{d}x\cdot(3-x)=\frac{\varepsilon_0}{d}(3x-x^2)$$

$$c'=\frac{\varepsilon_0}{d}(3-2x)$$

$$c'=0 \Leftrightarrow 3-2x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

	$\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$
y'	+	0	-

y	$\nearrow$	max	$\searrow$

Таким образом, емкость конденсатора будет наибольшей, если пластины квадратные со сторонами 1,5 см.

Опр. В точках, в которых функция не дифференцируема или имеет производную равную 0 называются критическими точками функции.

Замечание: Экстремумы надо искать в критических точках.

Теорема 2. Если $f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 и при переходе через критическую точку производная меняет знак, то эта критическая точка является точкой экстремума, в противном случае x_0 - не является точкой экстремума.

Опр. Точки, в которых производная равна нулю называются стационарными точками функции.

Теорема 3. Если в стационарной точке x_0 вторая производная $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка минимума, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка максимума функции.

Теорема: Если для $\forall x,\ x \in (a,b)\ f''(x) > 0$, то график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз на (a,b), если же $\forall x,\ x \in (a,b)\ f''(x) < 0$, то график выпуклый вверх на (a,b).

Опр. Точкой перегиба называется точка графика непрерывной функции отделяющая часть графика выпуклой вверх от части графика выпуклой вниз.

Теорема 4. Если при переходе через x_0 вторая производная меняет свой знак, то $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба.

Асимптоты графика функции

Опр. Прямая l называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

Замечание: Асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

1. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)$ (правосторонний или левосторонний) равен $\pm\infty$.

Прямая $x = x_0$ может быть вертикальной асимптотой функции $y = f(x)$ в том случае, если x_0 - точка разрыва или граничная точка области определения.

2. Прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то $y=b$ – правосторонняя горизонтальная асимптота, если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то $y=b$ – левосторонняя горизонтальная асимптота.

3 Если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0$ и $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$, то прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

Общий план исследования функций и построения графиков

1. Найти область определения функции.

2. Определить является функция четной или нечетной.

3. Исследовать функцию на асимптоты: вертикальные, горизонтальные, наклонные.

4. Определить интервалы возрастания и убывания.

5. Сделать вывод о точках максимума и минимума, а также максимальных и минимальных значениях функции.

6. Исследовать функцию на выпуклость и вогнутость, найти точки перегиба.

7. Построить график.

Примеры:

1. Исследовать функцию $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3$

Решение:

1. $D_f = R$

2. $y(-x) = -\frac{1}{3}(-x)^3 + (-x)^2 + 3 = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3$ - функция не обладает свойствами четности и нечетности.

3. Т.к. нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, то наклонных асимптот нет.

4. $y' = -\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 + 2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x = 0$

$x(-x + 2) = 0$

x=0 или x=2

5.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	min 3	$\nearrow$	max $\frac{13}{3}$	$\searrow$

6. $y'' = -2x + 2$

$y'' = 0 \Leftrightarrow -2x + 2 = 0$

x=1

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	+	0	-
y	$\cup$	точка перегиба $\frac{11}{3}$	$\cap$

7. Далее схематически строится график.

2. Исследовать функцию $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

Решение:

1. $D_f = R$

2. $y(-x)=\frac{-x-1}{\sqrt{(-x)^2+1}}=\frac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ - функция не обладает свойствами четности и нечетности.

3. Т.к. точек разрыва нет, то вертикальных асимптот нет.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$, то y=1 – горизонтальная асимптота.

Т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-1}{x\sqrt{x^2+1}}=0$, то наклонных асимптот нет.

4. $y'=\frac{(x-1)'\sqrt{x^2+1}-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'(x-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)'(x-1)}{x^2+1}=$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x(x-1)}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$y'=0 \iff x+1=0$

$x=-1$

5.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y'	-	0	+
y	$\searrow$	min $-\sqrt{2}$	$\nearrow$

6. $y''=\frac{(x+1)'\cdot(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)'\cdot(x+1)}{\left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)^2}=$

$$=\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'(x+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}2x(x+1)}{(x^2+1)^3}=$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}(x^2+1-3x^2-3x)}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^2-3x+1}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; -2x^2 - 3x + 1 = 0$

$D = 9 - 4\cdot(-2)\cdot 1 = 17$

$x_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{-4} \approx -1{,}8$

$x_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{-4} \approx 0{,}3$

x	$(-\infty;-1{,}8)$	-1,8	$(-1{,}8;0{,}3)$	0,3	$(0{,}3;+\infty)$
y''	-	0	+	0	-
y		$\approx -1{,}4$		$\approx -0{,}7$	

7. Схематически строится график.

2.5 Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить производные:

1) $y=\sqrt{x}+5\sqrt[3]{x^2}+x$;

2) $y=4e^{5x-1}$;

3) $y=x^3\sin x+\sqrt{x}$;

4) $y=\frac{\ln x+x}{x}$;

5) $y=2e^x-2^x\ln x-31x$;

6) $y=e^x+e^{-x}$;

7) $y=\frac{1}{4}\sin^4 2x$;

8) $y=x\cdot tgx+\ln\cos x+\frac{1}{\cos x}$;

9) $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}-\frac{3}{x^3}$;

10) $y=3^x+x^2 tgx$

2. Исследовать данные функции и построить графики.

1) $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$

2) $y = x^3 + 18x^2 + 105x + 195$

3) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$

4) $y = -x^3 - 3x^2 - 2$

5) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 1$

6) $y = -x^3 + 15x^2 - 72x + 109$

7) $y = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15$

8) $y = -x^3 - 9x^2 - 24x - 21$

9) $y = 2x^3 - 3x^2 + 15$

10) $y = -x^3 + 12x^2 - 45x + 53$

3 Интегральное исчисление функции

3.1 Первообразная функции. Неопределенный интеграл.

Пусть $y = F(x)$ имеет производную $y' = f(x)$, тогда ее дифференциал $dy = f(x)dx$.

Опр. Функция *F(x)* называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Нахождение первообразной - операция обратная дифференцированию.

Опр. Совокупность всех первообразных функций $F(x) + c$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)dx$, где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, а c – произвольной постоянной интегрирования.

Геометрически: неопределенный интеграл - семейство кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси *OY*.

Опр. Процесс нахождения интеграла называется интегрированием. Найти неопределенный интеграл для $f(x)$ значит найти все функции, производные которых равны $f(x)$ на D_f.

Естественно возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Заметим, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для этой функции существует первообразная (а значит, и неопределенный интеграл).

Свойства неопределенного интеграла

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал – подынтегральному выражению.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции $f(x)$ равен функции $f(x)$ с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int df(x) = f(x) + c$$

3. Постоянный множитель в подынтегральном выражении можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ где } a = const$$

4. Неопределенный интеграл суммы конечного числа функций равен сумме неопределенных интегралов этих функций.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Таблица интегралов

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

3) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

4) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = Ln|x| + C$

6) $\int e^x dx = e^x + C$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

8) $\int Sinxdx = -Cosx + C$

9) $\int Cosxdx = Sinx + C$

10) $\int \frac{dx}{Cos^2 x} = tgx + C$

11) $\int \frac{dx}{Sin^2 x} = -Ctgx + C$

12) $\int Sin\alpha xdx = -\frac{1}{\alpha} Cos\,\alpha x + C$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

14) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$

15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = Ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$

3.2 Методы вычисления неопределенных интегралов

Метод разложения

Метод разложения основан на применении свойств и таблицы интегралов.

Примеры:

1. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{\frac{1}{4}} dx - 2\int x^{\frac{5}{12}} dx + \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{24}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$

Проверка: $\left(\frac{4}{5}\sqrt[4]{x^5} - \frac{24}{17}\sqrt[12]{x^{17}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + c\right)' = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[12]{x^5} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, т.к. в результате получили подынтегральное выражение, то интеграл вычислен, верно.

2. $\int 2^{3x-1} dx = \frac{1}{2}\int 8^x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{8^x}{\ln 8} + c$

3. $\int \frac{dx}{9x^2 - 1} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ln\left|\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x - \frac{1}{3}}{x + \frac{1}{3}}\right| + c$

4. $\int \left(2x - 3x^3 + \frac{4}{\sin^2 x}\right) dx = 2\int xdx - 3\int x^3 dx + 4\int \frac{dx}{\sin^2 x} =$

$$= 2\cdot\frac{x^2}{2} - 3\cdot\frac{x^4}{4} + 4(-ctgx) + c = x^2 - \frac{3}{4}x^4 - 4ctgx + c$$

Метод замены переменной

Метод замены переменной или интегрирование подстановкой самый сильный метод интегрирования, описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$ - функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Примеры:

1. $$\int (3x-4)^{26}dx = \begin{bmatrix} (3x-4) = t & \\ 3x = t+4 & \\ x = \frac{t+4}{3} \quad => & dx = \frac{1}{3}dt \end{bmatrix} = \int t^{26}\cdot\frac{1}{3}dt =$$

$$= \frac{1}{3}\int t^{26}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^{27}}{27} + c = \frac{(3x-4)^{27}}{81} + c$$

2. $$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{7x+5}} = \begin{bmatrix} 7x+5 = t & \\ 7x = t-5 & \\ x = \frac{t-5}{7} \quad => & dx = \frac{1}{7}dt \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{14}\sqrt[3]{(7x+5)^2} + c$$

3. $$\int arctg^5x\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \begin{bmatrix} arctgx = t \\ \frac{dx}{1+x^2} = dt \end{bmatrix} = \int t^5dt = \frac{t^6}{6} + c = \frac{1}{6}arctg^6x + c$$

4. $$\int 4x^3\cdot\sqrt{x^4+6}dx = \begin{bmatrix} x^4+6 = t \\ 4x^3dx = dt \end{bmatrix} = \int\sqrt{t}dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^4+6)^3} + c$$

5. $$\int\cos 10xdx = \frac{1}{10}\int\cos 10xd(10x) = [10x = t] = \frac{1}{10}\int\cos tdt = \frac{1}{10}\sin t + c = \frac{1}{10}\sin 10x + c$$

Таблица дифференциалов

$$kdx = d(kx+c)$$
$$2xdx = d(x^2+c)$$

$4x^3 dx = d(x^4 + c)$
$\cos x dx = d(\sin x + c)$
$\frac{dx}{x} = d(\ln x + c)$

Метод интегрирования по частям

Теорема 1. Пусть *U(x), V(x)* и *U'(x),V'(x)* – непрерывны на *D*. Тогда справедлива формула интегрирования по частям

$$\int U \cdot dV = U \cdot V - \int V \cdot dU$$

Эта формула позволяет данный интеграл свести к более простому. Для того, чтобы воспользоваться формулой, подынтегральное выражение мыслят в виде произведения *U* и *dV*. За *U* выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании, за *dV* – выражение, которое легко интегрируется.

Примеры:

1.

$$\int x^7 \ln x \; dx = \begin{bmatrix} U = \ln x & dV = x^7 dx \\ dU = \frac{1}{x} dx & V = \frac{x^8}{8} \end{bmatrix} = \frac{x^8}{8} \ln x - \int \frac{x^8}{8} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^8 \ln x}{8} - \frac{1}{8} \int x^7 dx =$$

$$= \frac{x^8 \ln x}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^8}{8} + c = \frac{x^8}{64}(8 \ln x - 1) + c$$

Замечание: Этот метод может применяться несколько раз подряд.

2.

$$\int x^2 \cdot \sin 9x \; dx = \begin{bmatrix} U = \sin 9x & dV = x^2 dx \\ dU = \frac{1}{9} \cos x dx & V = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} = \frac{x^3}{3} \sin 9x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cos 9x \cdot dx = \text{получили}$$

более сложный интеграл

$$\int x^2 \cdot \sin 9x \cdot dx = \begin{bmatrix} U = x^2 & dV = \sin 9x \cdot dx \\ dU = 2x \cdot dx & V = -\dfrac{\cos 9x}{9} \end{bmatrix} = -\frac{x^2 \cdot \cos 9x}{9} + \int 2x \cdot \frac{\cos 9x}{9} dx = -\frac{x^2 \cdot \cos 9x}{9} +$$

$$+\frac{2}{9}\int x \cdot \cos 9x \cdot dx = \begin{bmatrix} U = x & dV = \cos 9x dx \\ & \\ dU = dx & V = \dfrac{\sin 9x}{9} \end{bmatrix} = -\frac{x^2 \cdot \cos 9x}{9} + \frac{2}{9}\left(\frac{x \cdot \sin 9x}{9} - \int \frac{\sin 9x}{9} dx\right) =$$

$$= \frac{x}{9}\left(\frac{2}{9}\sin 9x - x \cdot \cos 9x\right) - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{81} \cdot \int \sin 9x \cdot d(9x) = \frac{x}{9}\left(\frac{2}{9}\sin 9x - x \cdot \cos 9x\right) + \frac{2}{729}\cos 9x + c$$

3.3 Определенный интеграл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $a; b$ $a < b$.

Проделаем следующие операции.

1 Произведем произвольное разбиение Т отрезка [a, b] на n частей точками (рисунок 4)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$

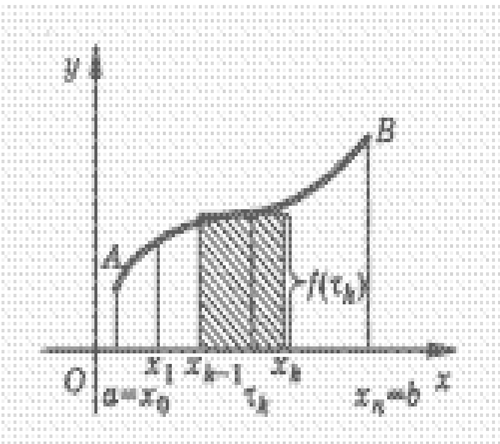

Рисунок 4 - Определение определенного интеграла

Обозначим через Δx_k разность x_k, - x_{k-1}, где k = 1,.. n, а наибольшую из них – через λ назовем ее ***параметром разбиения,*** то есть λ = наиб. Δx_k.

2 В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ выберем произвольную точку ξ_k.

Вычислим значение функции $f(\xi_k)$ и произведения $f\ \xi_k\ \ \Delta x_k\ \ k = 1,2,\ldots,n$.

3 Составим сумму произведений:

$f(\xi_1)\cdot \Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot \Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi k)\cdot \Delta xk$

Эту сумму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi k)\cdot \Delta xk = \sigma$

Называют ***интегральной суммой*** для функции у = f(х) на отрезке $[a;b]$.

Интегральная сумма зависит от способа разбиения T и выбора точек ξ_k.

Опр. Число I называется ***пределом интегральных сумм*** при $\lambda\to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ такое, что при любом способе разбиения T отрезка $[a;b]$ на части и любом выборе точек $\xi_k \in [x_{k-1};x_k]$, как только $\lambda < \delta$, то выполняется условие $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Коротко: $I = \lim_{\lambda\to 0}\sigma \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall (T;\xi_k):\lambda<\delta \Rightarrow |\sigma - I| <\varepsilon$.

Опр. Если существует конечный предел I интегральных сумм σ при $\lambda\to 0$, то этот предел называют определенным интегралом функции у=f(х) по отрезку $[a;b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

Таким образом, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta\chi_{\kappa}$.

Числа a и b называются соответственно ***нижним и верхним пределом*** интегрирования ***у=f(х)-подынтегральной*** функцией, ***х – переменной*** интегрирования, а функцию у=f(х),для которой существует определенный интеграл по отрезку $[a;b]$, называют ***интегрируемой*** на отрезке $[a;b]$.

Следует заметить, что если ***неопределенный*** интеграл от функции у=f(х)-это ***множество функций*** от переменной интегрирования, то ***определенный интеграл*** при заданных пределах интегрирования определяется однозначно и представляет собой ***число*** и, значит, не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$$

Рассмотрим свойства определенного интеграла [3]:

1) по определению полагаем, что $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

2) $\int_a^b c \cdot dx = c(b-a)$ при любом постоянном c;

3) если существует $\int_a^b f(x)\,dx$,то существует $\int_b^a f(x)\,dx$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$$

4) если существуют $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$, то существует интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, причем при любом расположении точек a, b и c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

5) если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке, содержащемся в отрезке $[a;b]$;

6) если функция f, g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$, где α, β −любые действительные числа, также интегрируема на этом отрезке, причем

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x))dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx;$$

7) если функция f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то функция f·g также интегрируема на этом отрезке.

Рассмотрим свойства, выраженные неравенствами:

Будем полагать, что $a < b$:

1) если интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция f неотрицательна, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0;$$

2) если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и

$f(x)\,dx \leq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$;

3) если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и функция $|f|$ интегрируема на отрезке, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx;$$

4) О*ценка интеграла.* Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и $m \leq f(x) \leq M \forall x \in \mathbf{R}$, то

$$M \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a);$$

5) *Теорема о среднем.* Если функция f *непрерывна* на отрезке $[a;b]$, то существует такое число $c \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a).$$

Теорема (*необходимой условие интегрируемости функции).* Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на нем.

Замечание. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости.

Например, рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x - \text{рациональное число}, \\ 0, \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

на отрезке $[0;1]$, на котором она ограничена $(0 \leq D(x) \leq 1)$.

Покажем, что функция Дирихле не интегрируема.

Действительно, если даже при *фиксированном* разбиении отрезка $[0;1]$ выбрать *рациональные* точки ξ_k, то все $(\xi_k) = 1$ и

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \cdot 1 = 1;$$

если же взять ξ_k *иррациональными*, то все $D(\xi_k) = 0$ и

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} D(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1 \cdot 1 = 0.$$

Таким образом, даже при одном способе разбиения T отрезка $[0;1]$ существует бесконечное множество интегральных сумм, равных нулю и бесконечное множество интегральных сумм, равные единице [4].

Следовательно, не существует $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ и функция Дирихле *не интегрируема* на отрезке $[0;1]$.

Для удовлетворения критерия интегрируемости функции рассмотрим суммы Дарбу.

Пусть функция y= f(x) определена и ограничена на отрезке $a; b$.

Произведем разбитие Т отрезка точками

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$ (рисунок 4).

На каждом частичном отрезке $x_{k-1}; x_k$ $k = 1,2, \ldots$,n функция также ограничена. Обозначим через m_k и M_k соответствено точную нижнюю и точную верхнюю границы значений функции на отрезке $x_{k-1}; x_k$, то есть

$m_{\boldsymbol{k}} = \inf\limits_{x \in x_{k-1}; x_k} f(\mathrm{x})$, $M_k = \sup\limits_{x \in x_{k-1}; x_k} f(\mathrm{x})$.

Составим суммы:$s = {}_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$ и S= ${}_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$,

которые называют соответственно ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу*** функции y= f(x) для выбранного разбиения Т отрезка $a; b$.

Суммы Дарбу зависят только от разбиения отрезка $a; b$, в то время как интегральная сумма σ зависит еще и от выбора точек ξ_k на частичных отрезках $x_{k-1}; x_k$. При *фиксированном* разбиении отрезка $a; b$ суммы Дарбу s и S- некоторые числа, а интегрируемая сумма σ остается переменной, так точки ξ_k произвольны.

Геометрический смысл сумм Дарбу: если функция y= f(x)*непрерывна* и *неотрицательна* на отрезке $a; b$, то нижняя сумма s- площадь ступенчатой многоугольной фигуры, *содержащейся* в криволинейной трапеции, а верхняя сумма S-площадь ступенчатой многоугольной фигуры, *содержащей* криволинейную трапецию.

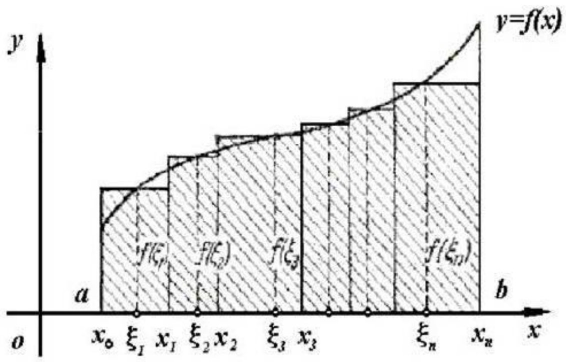

Рисунок 5 – Геометрический смысл определенного интеграла

Опр. Криволинейной трапецией называют плоскую фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $a; b$ функции y= f(x), осью Оx и прямыми $x = a, x = b$ (рисунок 5).

Рассмотрим свойства сумм Дарбу:

1) для каждого разбиения Т отрезка $a; b$ суммы Дарбу s и S являются точными границами для множества интегральных сумм: s$\leq I \leq S$;

2) при добавлении конечного числа новых точек разбиения нижняя сумма не уменьшится, а верхняя не увеличится;

3) каждая нижняя сумма Дарбу не превосходит каждой верхней суммы, даже если эти суммы отвечают различным разбиениям T_1 и T_2 отрезка $a; b$

$$s_{T_1} \leq S_{T_2}.$$

Следствие: Если функция определена и ограничена на отрезке $a; b$, то существует единое число I, удовлетворяющее условию: s$\leq I \leq S$.

Теорема 1. Для того чтобы определенная и ограниченная на отрезке $a; b$ функция была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$.

Следствие: Если функция интегрируема, то существуют $\lim_{\lambda\to 0}\sigma, \lim_{\lambda\to 0} s, \lim_{\lambda\to 0} S$, причем

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0} s = \lim_{\lambda\to 0} S = {}_{a}^{b}\; f\;\; x\;\; dx\,.$$

Рассмотрим другую форму записи критерия интегрируемости функции.

По определению,

$S = {}_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k$и $s = {}_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k$.

Тогда

S$- s = {}_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k - {}_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = {}_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\,\Delta x_k$.

Обозначим разность $M_k - m_k$через ω_k. Это число называется **колебанием** функции на отрезке $x_{k-1}; x_k$. Отсюда S$- s = {}_{k=1}^{n}\omega_k \cdot \Delta x_k$

и,$\lim_{\lambda\to 0}(\mathrm{S} - s) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\; {}_{k=1}^{n}\omega_k \cdot \Delta x_k = 0$.

Теорема 2. Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция была интегрируема на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k\cdot\Delta x_k=0.$$

Теорема 3. Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции y=f(x)равен разности значений любой ее первообразной в верхнем и нижнем пределах интегрирования, то есть

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Примеры:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,d(2x)=\frac{1}{2}(-\cos 2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{2}(-1-1)=1.$

2. $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\Big|_0^{\sqrt{3}}=\ln\left(\sqrt{3}+2\right).$

3. $\int_0^1\frac{arctgx}{1+x^2}\cdot dx=\int_0^1 arctgx\,d(arctgx)=\frac{1}{2}arctg^2x\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{32}.$

3.4 Геометрические приложения определенного интеграла

Пусть функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$. Если при этом *f(x)*≥ 0 на этом отрезке, то площадь *S* криволинейной трапеции, ограниченной линиями *y=f(x), y=0, x=a, x=b* (рисунок 6), выразится с помощью интеграла: $S=\int_a^b f(x)\,dx.$

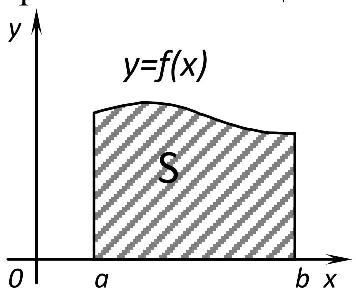

Рисунок. 6 – Площадь криволинейной трапеции

Замечания: 1. Если же $f(x) \le 0$ на $[a, b]$, то $-f(x) \ge 0$ на этом отрезке (рисунок 6). Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{или} \quad S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

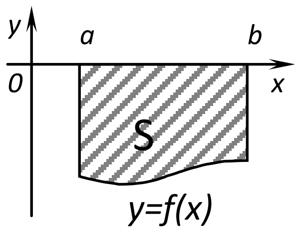

Рисунок. 7 – Площадь криволинейной трапеции

Наконец, если линия $y=f(x)$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a, b]$ надо разбить на части, в пределах которых $f(x)$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул, которая ей соответствует.

2. Площадь криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком функции $y_2=f_2(x)$, снизу – графиком функции $y_1=f_1(x)$,(рисунок 7) слева и справа прямыми $x=a$, $x=b$, вычисляется по формуле: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

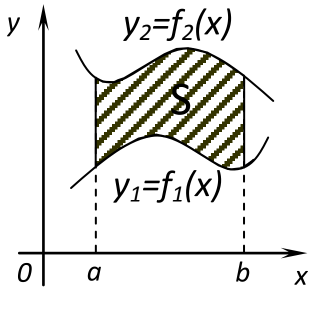

Рисунок. 8 – Площадь криволинейной фигуры

Площадь криволинейной фигуры, ограниченной справа графиком функции $x_2=\varphi_2(y)$, слева – графиком функции $x_1=\varphi_1(y)$, снизу и сверху прямыми $y=c$, $y=d$ (рисунок8), вычисляется по формуле: $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$

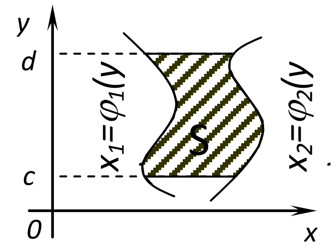

Рисунок 9 – Площадь криволинейной фигуры

3.5 Задания для самостоятельного решения

Вычислить интегралы.

1) $\int(\cos x + e^x - x)dx$

2) $\int\frac{\sqrt[3]{x} - x}{x^2}dx$

3) $\int\frac{dx}{x^2 - 4}$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$

5) $\int\sin 5x dx$

6) $\int\frac{arctg^2 x}{x^2 + 1}dx$

7) $\int\frac{dx}{5 - x}$

8) $\int tg(2x - 5)dx$

9) $\int xe^{-x}dx$

10) $\int\arccos x dx$

2. Найти площадь фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

1) $y = 3x - 1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 4$

2) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

3) $y = 9 - x^2,\ y = 0$

4) $y = 4x - x^2, y = 0$

5) $y = x^2 - 2x + 3,\ y = 6$

6) $y = x^2 + 2x + 3,\ y = 6$

7) $y = e^x,\ y = 0,\ x = -1, x = 1$

8) $y = \ln x,\ y = 0,\ x = e$

9) $y = x^2 - 4x, y = 0$

10) $y = x^2, x = 0, x = 3$

4 Дифференциальные уравнения

4.1 Понятие дифференциального уравнения

В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений являются изучение функций, представляющих собой решение этих уравнений 1 .

Опр. Дифференцированное уравнение – это равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Общий вид дифференциального уравнения: F(x,y,y',y''…) = 0 – неявная форма, где x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y' – ее производная первого порядка и т.д.

Например:

1. $(y')^2 + 3xy = 0$;

2. $5y'' + 3y' - 4y = 0$.

Если из уравнения можно выразить y', то оно примет вид: $y' = f(x,y)$ – явная форма. Это уравнение первого порядка, *разрешенное относительно производной*.

Опр. Порядок дифференциального уравнения – это порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнение.

Например, уравнение $y''+5y'-3y=0$ – это дифференциальное уравнение второго порядка.

Опр. Решение дифференциального уравнения – это функция $y=y(x)$, определения на некотором интервале (a,b) удовлетворяющая этому уравнению, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Опр. График решения дифференциального уравнения называется интегральной прямой.

Опр. Общее решение – это решение, зависящее от произвольных постоянных. Оно содержит столько независимых переменных, каков порядок уравнения. Общее решение дифференциального уравнения – это семейство функций $y=\varphi(x,C)$, удовлетворяющее этому уравнению, при произвольном значении постоянных С.

Например, для дифференциального уравнения $xy' -2x^2=0$ функция $y=x^2$ будет решением, так как при ее подстановке левая часть уравнения тождественно обращается в нуль: $x\cdot 2x-2x^2=0$.

Опр. Частное решение–это решение, которое получается из общего решения при конкретных определенных значениях произвольных постоянных $y=\varphi(x,C_0)$.

Для нахождения частных решений задают дополнительные условия. Эти условия будут называться начальными, если все они относятся к одному и тому же значению независимой переменной. Начальные условия или условия Коши задают значение функции y_0 в фиксированной точке x_0, $y_0=y(x_0)$.

Об этом говорит теорема Коши.

Теорема *(Коши)* Пусть одно дифференцированное уравнение $y'=f(x,y)$. Если функция $f(x,y)$ и ее частая производная $f'_y(x,y)$ непрерывная в некоторой области D плоскости xOy, то в некоторой окрестности любой внутренней точки (x_0, y_0) этой области D существует единственное решение данного дифференцированного уравнения, удовлетворяющее условие $y=y_0$ при $x=x_0$.

С геометрической точки зрения в области D содержится множество интегральных кривых $y=\varphi(x,C)$, соответствующих различным значениям С. Теорема Коши говорит о том, что при соблюдении определенных условий, через каждую внутреннюю точку области D проходит только одна интегральная кривая. То есть начальные условия фиксируют произвольную постоянную C и позволяет выбрать из семейства интегральных кривых уравнений только одну интегральную кривую $y=\varphi(x,C_0)$, проходящую через заданную точку (x_0, y_0).

Например, дифференцированное уравнение $y'=x^2+C$, где C – произвольная постоянная. Это семейство парабол. Частное решение при произвольных условиях $y_0 = y(x_0)$ будет иметь вид: $y=x^2+C \Rightarrow C=y_0 - x_0^2$. Подставим в общее решение $y = x^2+ y_0 - x_0^2$ – это частное решение. Оно выделяет одну параболу из семейства кривых, проходящую через точку $(y_0; x_0)$.

Примеры:

1. Проверить подстановкой, что дифференцированное уравнение

$y' - 2y=e^{3x}$ имеет общее решение в виде $y =e^{3x} + Ce^{2x}$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y=3$ при $x=0$.

Решение:

$y=e^{3x} + Ce^{2x}; \quad y'=3e^{3x}+2Ce^{2x}$.

Подставим в дифференцированное уравнение:

$3e^{3x}+2Ce^{2x} - 2(e^{3x}+Ce^{2x})=e^{3x}$

$3e^{3x}+2Ce^{2x} - 2e^{3x}+2Ce^{2x}=e^{3x}$

$e^{3x}= e^{3x}$ – это тождество.

Частное решение.

$y =e^{3x} + Ce^{2x}; \ 3=e^0+C^0 \Rightarrow C=3$

$y =e^{3x} +3e^{2x}$ – частное решение.

4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Опр. Уравнение первого порядка $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функция P и Q разлагаются на множители, зависящее каждый только от одной переменной:

$f_1(x)f_2(y)dx+\varphi_1(x)\varphi_2(y)dy=0$.

В таком уравнение после деление его на членов $f_1(x)\cdot \varphi_1(x)$переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dx=0,$$

и каждый член уравнения зависит от одной переменной.

Общий интеграл уравнения находится интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dx=0.$$

Рассмотрим примеры решения уравнений методом разделения переменных

Пример: Найти общие интегралы уравнения: $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$.

Решение: Разделим переменные в данном уравнении, деля его обе части на $(x+3)^3\cdot(y-2)^2$.

$$\frac{dx}{(y-2)^2}-\frac{dx}{2(x+1)^3}=0.$$

Полученное выражение интегрируем первое слагаемое по y, а второе по x, получим искомое общее решение:

$$-\frac{1}{y-2}-\frac{1}{2(x+1)^2}=C.$$

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида:

$$y'+p(x)y=q(x),$$

где $p(x)$ и $q(x)$ – непрерывные функции.

Название уравнения «линейное» связано с тем, что неизвестная функция и ее производная входят в первой степени, т.е. линейно.

1. Линейное однородное уравнение будет, если $q(x)\equiv 0$, т.е. это уравнение вида:

$y'+P(x)y=0$

Это уравнение с разделяющимися переменными, и его решение будет иметь вид:

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

2.Линейное неоднородное уравнение будет, если функция *q(x)* не равна тождественно нулю:

$$Q(x)\neq 0 : y' + P(x)y = q(x).$$

Общее решение линейного уравнения первого порядка находится метод вариации постоянной, и имеет вид:

$$y\ x\ = e^{-\ P\ x\ dx}\ C + \ \ q\ x\ e^{\ P\ x\ dx} dx\ .$$

Или можно *C* заменить на известную функцию *u(x)*, решение искать в виде:

$$y = u\ x\ e^{-\ P\ x\ dx}$$

3.Уравнение Бернулли – это нелинейное уравнение вида:

$$y' + P(x)y = q(x)y^n,$$

где n – некоторое постоянное число. При n=1 это линейное однородное уравнение.

$y' + (p - q)y = 0$

При $n\neq 0$ и $n\neq 1$, то нелинейное уравнения сводятся к линейным соответствующими заменами y(x).

Пример: Решить уравнение: $y' x^2 y = x^2$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение первого порядка, где $P(x)=x^2$, и $q(x)=x^2$.

$$x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

$$x^2 e^{\frac{x^3}{3}} dx = e^{\frac{x^3}{3}}$$

Решение будет иметь вид: $y\ x\ = Ce^{-\frac{x^3}{3}} + 1$

4.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Опр. Уравнение вида $a_0 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$ называются линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общий интеграл находится с помощью *характеристического уравнения*:

$a_0k^2+a_1k+a_2=0$, которое получается из этого, если, сохраняя в нем все коэффициентами a_i, заменить функцию y единицей (y=1), а все ее производные заменить соответствующими степенями k.

При этом:

1. если все корни характеристического уравнения действительные и различные, то общий интеграл имеет вид: $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$;

2. если корни характеристического уравнения;

$k_1=k_2$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

3. если корни мнимые $k=\pm bi$: $y = C_1cosbx + C_2sinbx$;

4. если корни комплексные $k=a\pm bi$: $y = e^{ax}(C_1cosbx + C_2sinbx)$.

Найти общее решение следующих дифференциальных уравнений.

Пример: $2\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$2k^2 – 5k+2=0$

$k_1=2$, $k_2=½$.

Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{x/2}$$

4.4 Задания для самостоятельного решения

Найти общее решение дифференциальных уравнений

1) $yy'+x=0$;

2) $y'=e^{3x+y}$;

3) $xy' – y=0$;

4) $x^2y'+y=0$;

5) $2yy'=1$;

6) $y' - \frac{y}{x} = x$;

7) $y' + x^2y = 2e^{-\frac{x^3}{3}}$;

8) $y'' – 3y'=4y$;

9) $y'' – 10y'+26y=0$;

10) $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0;$

5 Функции нескольких переменных

5.1 Основные понятия.

Рассмотрим функции двух переменных и по аналогии с ними функции n-переменных.

Опр. Если каждой паре $(x;\ y)\in D$ ставится в соответствие одно определенное значение $z\in E$, то z называется функцией двух независимых друг от друга переменных x и y и обозначается $z=f(x,y)$. Множество D называют областью определения функции $z=f(x,y)$ (это подмножество координатной плоскости XoY), а множество E – множеством ее значений. Переменные x и y по отношению к функции z называются ее аргументами.

Замечание: Частным значениям аргументов $(x_0,y_0)\in D$ соответствует частное значение функции $z_0=f(x_0,y_0)$. Подобно тому, как функция $y=f(x)$ геометрически изображается графиком, можно геометрически $(x;\ y)\in D$ аппликату $z=f(x,y)$, мы получим некоторое множество точек (x,y,z) трехмерного пространства – чаще всего некоторую поверхность. Поэтому равенство $z=f(x,y)$ называют уравнением поверхности.

Опр. Окрестностью точки $(x_0,y_0)\in D$ называется круг, содержащий указанную точку. Очевидно, круг на плоскости есть двумерный аналог интервала на прямой.

Замечание: Любой функции $z=f(x,y)$ можно поставить в соответствие пару функций одной переменной: при фиксированном значении $x=x_0$ функцию $z=f(x_0,y)$ и при фиксированном значении $y=y_0$ функцию $z=f(x,y_0)$. Следует иметь в виду, что хотя функции $z=f(x_0,y)$ и $z=f(x,y_0)$ имеют одно и то же «происхождение», вид их может существенно различаться.

Пример: Найти область определения функции $z=\frac{1}{x\cdot y}$.

Решение: Имеем $x \neq 0$ и $y \neq 0$, т.е. область определения – это плоскость XoY за исключение координатных прямых.

Опр. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\xi > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее от ξ, такое, что для всех точек (x, y), отстоящих от точки (x_0, y_0) не более, чем на δ, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \xi$.

Опр. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если она: 1) определена в точке (x_0, y_0); 2) имеет конечный предел при $x \to x_0$ и $y \to y_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке (x_0, y_0), т.е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Геометрический смысл непрерывности очевиден: график в точке (x_0, y_0) представляет собой сплошную, нерасслаивающуюся поверхность.

Опр. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в данной области, если эта функция непрерывна в каждой точке рассматриваемой области.

Свойства непрерывных функций от многих переменных

1. Сумма непрерывных функций является непрерывной функцией.
2. Произведение непрерывных функций является также непрерывной функцией.
3. Частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция в точках, в которых знаменатель отличен от нуля.
4. Сложная функция, составленная их непрерывных функций, есть непрерывная функция.

Например, функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\varphi(x, y) = e^{x+y}$, $\psi(x, y) = \sin(x^2 y^2 - xy)$ непрерывны всюду, а функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$ непрерывна всюду, кроме точек прямой $x = y$.

5.2 Частные производные

Опр. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ называется частной производной $z=f(x;\ y)$ по переменной x в точке $P_0(x_0;y_0)$и пишут $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x

Опр. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0; y_0)}{\Delta y}$ называется частной производной $z=f(x;\ y)$по переменной y в точке $P_0(x_0;y_0)$ и пишут $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, z'_y

Замечание: Все правила и формулы дифференцирования, выведенные для производных одной переменной, сохраняются для частных производных функции двух переменных. Однако, следует помнить, что при нахождении частной производной по какому-либо аргументу второй аргумент считается постоянным.

Пример: Найти частные производные функции $z=5x^2y^3-3x+1$.

Решение: Частную производную z'_x находим как производную функции $f(x, y)$ по аргументу xв предположении, что $y=const$, $z'_x=10y^3x-3$ и аналогично $z'_y=15x^2y^2$.

Опр. Частная производная от частной производной функции называется частной производной второго порядка этой функции.

Обозначение: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial z}=z''_{xy}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$

Пример: Вычислить частные производные второго порядка

$$z=x^3y^2-5xy+7x$$

Решение:

$z'_x=3x^2y^2-5y+7$

$z''_{xx}=6xy^2$, $z''_{xy}=6x^2y-5$

$z'_y=2x^3y-5x$

$z''_{yx}=6x^2y-5$, $z''_{yy}=2x^3$

Замечание: Частные производные функции являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются вторыми частными производными. Аналогично определяются и вычисляются частные производные высших порядков от функции трех и большего числа переменных.

Опр. Пусть $z = f(x;y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$. Выражение $f'_x(x_0;y_0)\ \Delta x + f'_y(x_0;y_0)\ \Delta y$ называется полным дифференциалом функции в точке P_0 и обозначается $df(x_0;y_0)$, $dz(x_0;y_0)$

$dz = z'_x \Delta x + z'_y \Delta y$ - 1-я формула

$dz = z'_x dx + z'_y dy$ - 2-я формула

Опр. Дифференциал от дифференциала называется дифференциалом второго порядка этой функции $d(dz) = d^2 z$

Опр. Дифференциал от дифференциала *(n – 1)* порядка называется дифференциалом *n*-го порядка $d(d^{n-1}z) = d^n z$

Формула для дифференциала 2-го порядка:

$$d^2 z = z''_{xx}(dx)^2 + 2z''_{xy}dx \cdot dy + z''_{yy}(dy)^2$$

Пример: Вычислить дифференциал второго порядка для функции $z = x^3y^2 - 5xy + 7x$

Решение:

$z'_x = 3x^2y^2 - 5y + 7$

$z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{xy} = 6x^2y - 5$

$z'_y = 2x^3y - 5x$

$z''_{yx} = 6x^2y - 5$, $z''_{yy} = 2x^3$

$d^2 z = 6xy^2(dx)^2 + 2(6x^2y - 5)dxdy + 2x^3(dy)^2$

5.3 Исследование функции двух переменных на экстремум

Опр. Говорят, что функция $f(x;y)$ имеет максимум в точке $P_0(x_0;y_0)$ если в окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x;y) < f(x_0;y_0)$.

Опр. Функция $f(x;y)$ имеет минимум в точке $P_0(x_0;y_0)$ если в окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x;y) > f(x_0;y_0)$.

Опр. Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Опр. Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными точками функции.

Теорема 1. Если в точке $P_0(x_0;y_0)$ обе частные производные обращаются в нуль, то характер этой точки определяется величиной $\Delta = AC - B^2$, где $A = f''_{xx}(x_0;y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0;y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0;y_0)$.

При $\Delta > 0$ точка P_0 - точка экстремума, причем

если $A < 0$, то это точка максимума

если $A > 0$, то это точка минимума;

При $\Delta < 0$ точка P_0 - не является точкой экстремума

При $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Схема исследования функции на экстремум:

1. найти частные производные z'_x и z'_y;

2. решить систему уравнений $z'_x = 0, z'_y = 0$ и найти критические точки функции;

3. найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в каждой критической точке и сделать вывод о наличии экстремумов;

4. вычислить значение функции в точках экстремума.

Пример: Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$

Решение:

$$\begin{matrix} z'_x = 3x^2 - 3y \\ z'_y = 3y^2 - 3x \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^4 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x^4 - x = 0 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{matrix} \Rightarrow x = 0 \text{ или } x = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Получили две точки *M (0; 0)* и *P (1; 1)*

$A_0 \cdot C_0 - B^2 - ?$

$z''_{xx} = 6x \; z''_{xy} = -3 \; z''_{yy} = 6y$

Исследуем точку *M (0; 0):* $A_0 = 0, B_0 = -3, \quad C_0 = 0$

$A_0 C_0 - B_0^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \Rightarrow$нет экстремума, точка M – не является точкой экстремума.

Исследуем точку *P (1; 1):* $A_0 = 6, \; B_0 = -3, \quad C_0 = 6$

$A_0 C_0 - B_0^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 > 0 \Rightarrow$точка P – точка экстремума, так как $A_0 = 6 > 0$, то

$f_{\min}(P) = 1 + 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$

5.4 Задания для самостоятельного решения

1. Найти полный дифференциал

1) $z = arctg\dfrac{x}{y}$ 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$

3) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$ 4) $z = \sqrt{2xy + y^2}$

Доказать, что $z''_{xy} = z''_{yx}$

5) $z = arctg\dfrac{x}{y}$ 6) $z = \ln(x^2 + y^2)$

7) $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$ 8) $z = \sqrt{2xy + y^2}$

9) $z = e^{x^2 y + y^3}$ 10) $z = y^{5x}$

2. Исследовать данную функцию на экстремум.

1) $z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20$

2) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y + 4$

3) $z = x^2 + y^2 + 3xy - x - y + 3$

4) $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$

5) $z = x^2 + y^2 + xy - 13x - 11y + 17$

6) $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y + 3$

8) $z = 3x^2 + 3y^2 + 5xy + 4x + 7y + 1$

9) $z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12y + 10$

10) $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3$

6 Числовые ряды

6.1 Основные понятия числовых рядов

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел: $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n, \ldots$ выражение $\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \ldots + \mathrm{U}_n + \ldots$ - называется бесконечным ***числовым рядом*** (или просто рядом). И обозначается: $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}_n$

Опр. Числа $\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \ldots, \mathrm{U}_n, \ldots$ – называются членами ряда, а член ряда U_n – его ***общим членом.***

Примеры рядов:

1) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$

2) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots,$

3) $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$

Ряд можно задать с помощью общего члена, например, $\mathrm{U}_n = \frac{1}{2n-1}$, определяет следующий ряд:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Опр. Частичной суммой S_n числового ряда называется сумма его первых *n* членов,

$S_1 = U_1, \quad S_2 = U_1 + U_2, \quad S_3 = U_1 + U_2 + U_3, \quad S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n.$

Опр. Суммой числового рядаS называется предел последовательности его частичных сумм, если этот предел существует $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$,

Причем, ряд называется ***сходящимся***, в противном случае, если же $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется ***расходящимся.***

Примеры: Исследовать на сходимость ряды

1. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots;$

2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots;$

Решение:

1.Рассмотрим ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$. Найдем его частичные суммы $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, \ldots$ Последовательность его частичных сумм 1,0,1,0.1,0... не имеет предела, следовательно, ряд расходится.

2.Рассмотрим ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$,найдем его частичные суммы:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};$$
$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}, \ldots$$
$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1,$ то рассматриваемый ряд сходится: его сумма равна 1.

3. Исследовать на сходимость $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$

Решение: Данный ряд составлен из членов геометрической прогрессии, с первым членом a и знаменателем q(будем считать $a \neq 0$):

$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots,$ известно, что сумма S_nпервых n членов геометрической прогрессии определяется по формуле$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}$, или $S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right)$, очевидно, что при $|q|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}) = \frac{a}{1-q}$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$), ряд сходится и его сумма $S = \frac{a}{1-q}$.

В остальных случаях, при $|q| \ge 1$, ряд расходится (доказать самостоятельно).

Например, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{2^m}{5^m}$ сходится, т.к. $q=\frac{2}{5}$ и его сумма $S = \frac{2/5}{1-2/5} = \frac{2}{3}$, а ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{7^m}{3^m}$ расходится, т.к. $q=\frac{7}{3}$.

Свойства сходящихся числовых рядов

1. Два сходящихся ряда :

$A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ и
$B = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$

можно почленно складывать (или вычитать),так что ряд

$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots$ также сходится, и его сумма S равна, соответственно, $S = A \pm B$.

2. Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель *c*, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на *c*).

3. Данное свойство связано с понятием остатка ряда. Если в числовом ряде отбросить первые *m* членов, то получится ряд:

$U_{m+1} + U_{m+2} + \ldots + U_{m+k} + \ldots = \sum\limits_{n=m+k}^{\infty} U_n$, называемый ***остатком ряда***.

Если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, то сходится и любой из его остатков $U_{m+1} + U_{m+2} + \ldots + U_{m+k} + \ldots = \sum\limits_{n=m+k}^{\infty} U_n$; обратно, из сходимости остатка вытекает сходимость исходного ряда.

Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение вначале его нескольких новых членов не отражается на сходимости ряда.

6.2 Признаки сходимости числовых рядов

Теорема (необходимый признак сходимости ряда) Если ряд сходится, то общий член U_n стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Доказательство. По условию ряд сходится, следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Очевидно, что $S_n = S_{n-1} + U_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$.

Отсюда следует ***достаточный признак расходимости:***.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то ряд $\sum U_n$ расходится.

Пример: Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n+1}$

Решение: Найдем предел общего члена ряда при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \neq 0$$

Следовательно, данный ряд расходится.

Замечание. Необходимо условие сходимости ряда не является достаточным. Существует много расходящихся рядов, у которых общий член ряда стремится к нулю. Примером такого ряда служит ряд

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ...$, который называется ***гармоническим.***

Гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Рассмотрим достаточные признаки сходимости рядов:

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, члены которого положительны, т.е. $a_n > 0$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Теорема (признак Даламбера) Пусть для числового ряда с положительными членами: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...,$ $\quad a_n > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D,$ тогда:

- при *D<1* ряд сходится;

- при *D>1* ряд расходится;

- при *D=1* ряд может сходиться или расходиться (в этом случае требуется дополнительные исследования).

Теорема (признак Коши) Пусть для числового ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \qquad a_n > 0 \text{ имеет место } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = D, \text{ тогда:}$$

- при *D<1* ряд сходится;

- при *D>1* ряд расходится;

- при *D=1* ряд может сходиться или расходиться (в этом случае требуется дополнительные исследования).

Примеры:

1. Исследовать на сходимость ряд $\sum \frac{3^n}{n!} = 3 + \frac{9}{2!} + \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} + \ldots + \frac{3^n}{n!} + \ldots$

Решение: Применим признак Даламбера, вычислим

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n!}{(n+1)!3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$$

число *D=0 <1*, следовательно, ряд сходится.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{2^n}\right)^n$.

Решение: Применим признак Коши:

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{2^n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{2^n}\right) = 2 > 1 \text{ – ряд расходится.}$$

Теорема (интегральный признак Маклорена – Коши)

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ числовой ряд с положительными числами.

Пусть члены ряда удовлетворяют следующим условиям:

1) составляют монотонную не возрастающую последовательность

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$;

2) можно построить монотонную не возрастающую функцию $y = f(x)$ $x \in [x_0, \infty)$ такую, что $f(0) = a_0$; $f(1) = a_1$; $f(2) = a_2$; ... ; $f(n) = a_n$; ...; , тогда заданный ряд $\sum a_n$ – сходится и расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$.

Пример: Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Решение: Члены ряда составляют монотонно убывающую последовательность $1 > \frac{1}{2^p} > \frac{1}{3^p} > .... > \frac{1}{n^p} > ....$

Следовательно, функцией $f(x)$ будет $\frac{1}{x^p}$; $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

Тогда $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \lim_{N \to \infty} \int_1^N \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} 0, p > 1; \\ \infty, p < 1. \end{cases}$ (доказать самостоятельно).

Если p=1, то имеем $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонический ряд, который расходится.

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся.

Пусть даны два положительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$$

Если имеет место неравенство $a_n \leq b_n$, то

1) из сходимости второго ряда вытекает сходимость первого ряда; 2) из расходимости первого ряда следует расходимость второго ряда.

Теорема ***(предельный признак сравнения)*** Если существует предел (в предположении, что $b_n \neq 0$) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=K$, $(0 \le K \le +\infty)$ то оба ряда сходятся или оба расходятся одновременно.

Примеры:

1 Исследовать сходимость ряда $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 2^n}+\ldots$

Решение: Члены ряда не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда, составленного из членов геометрической прогрессии с общим членом : $U_n=\dfrac{1}{2^n}$:

$\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

Согласно признаку сравнения, данный ряд также сходится.

2 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{x}{n}$ $(0<x<\pi)$

Решение: Ряд расходится по предельному признаку сравнения, так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{1}{n}}=x$, где известно, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ - расходится .

6.3 Знакопеременные ряды

Опр. Знакопеременным рядом называется ряд, членами которого являются действительные числа произвольного знака.

Например, 1) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}-\ldots$

2) $\dfrac{\sin\alpha}{1}+\dfrac{\sin 2\alpha}{4}+\dfrac{\sin 3\alpha}{9}+\ldots+\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$

3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}+\ldots$

Опр. Знакопеременный ряд называется знакочередующимся, если соседние его члены имеют различные знаки.

Например, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^{n-1}}=1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\ldots.$

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$ называется:

- ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд составленный из модулей его членов $\sum_{n=1}^{\infty}|U_n|$;

- ***условно сходящимся***, если он сходится, но не сходится абсолютно.

Имеют место следующие свойства абсолютно сходящихся рядов:

1)всякий абсолютно сходящийся ряд сходится;

2)если в абсолютно сходящемся ряде произвольным образом переставить члены, то полученный ряд также будет абсолютно сходится, а сумма его будет равна сумме исходного ряда.

Пример: Исследовать ряд $\sum\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ на сходимость.

Решение: Составим ряд из модулей $\sum\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$, он сходится.

По признаку сравнения, так как

$\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$ Ряд $\sum\frac{1}{n^2}$ – сходится следовательно, сходится и ряд $\sum\frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

Таким образом, сходится абсолютно ряд $\sum\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Теорема (*признак сходимости Лейбница)* Если члены знакочередующегося ряда $U_1-U_2+U_3-U_4+\ldots$

1) монотонно убывают по абсолютной величине, т. е. $U_1\ge U_2\ge U_3\ge\ldots\ge U_n\ge U_{n+1}\ge\ldots$, и

2) общий член ряда стремится к нулю, $\lim_{n\to\infty}U_n=0$, то:

1) ряд сходится;

2) его сумма не превосходит величины первого члена ряда

$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n\le U_1$;

3) модуль суммы остатка ряда не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена (первого члена остатка): $|r_n| \le U_{n+1}; r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k U_k$ и имеет знак своего первого члена.

Пример: Исследовать на сходимость ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$

Решение: Ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ сходится по признаку Лейбница, так как члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине $1\ge\frac{1}{2}\ge\frac{1}{3}\ge\frac{1}{4}\ge\ldots$ и общий член ряда стремится к нулю, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

6.4 Задания для самостоятельного решения

Исследовать ряд на сходимость:

1) $^{\infty}_{n=1}\frac{arctgn+1}{n^2}$

2) $^{\infty}_{n=1}\frac{5^n+1}{2^n}$

3) $^{\infty}_{n=1}\frac{2^n}{n^2}$

4) $^{\infty}_{n=1}\frac{3^n}{n^3}$

5) $^{\infty}_{n=1}\frac{3^n}{n!}$

6) $^{\infty}_{n=1}\frac{n^n}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+1)!}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$

Список использованных источников

1 **Омельченко, В. П.** Математика: учебное пособие, среднее профессиональное образование / В.П.Омельченко. -Ростов н/Д. : Феникс, 2005.-380 с. -ISBN 5-222-06004-7.

2 **Филимонова, Е. В.** Математика: учебное пособие, среднее профессиональное образование / Е. В. Филимонова. - Ростов н/Д. : Феникс, 2008. - 414, [1]с. –ISBN 987-5-222-14194-9.

3 **Евдокимов, М.А.** Интегральное исчисление и его приложения: учебник / М.А. Евдокимов, Л.В. Лиманова. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2008. – 208 с. - ISBN 978-5-7964-1155-1.

4 **Шипачев, В. С.** Высшая математика: учебник для вузов/ В. С. Шипачев.- изд. 6-е., стер.- М.: Высшая школа, 2008. - 479с. - ISBN 5-06-003959-5.

5 **Дадаян, А. А**. Математика : учебник / А. А. Дадаян. - 3-е изд. – М. : ФОРУМ, 2011. – 544 с. – ISBN978-5-91134-460-3.