

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Оренбургский государственный университет»

М. Р. Арифуллин, Г. С. Якупов

# **ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ**

Учебное пособие

Рекомендовано ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет» для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 Физика

Оренбург  
2021

УДК 53(075.8)

ББК 22.3я73

A81

Рецензент – доктор физико-математических наук, доцент В. Л. Бердинский

**Арифуллин, М. Р.**

A81 Электричество и магнетизм: учебное пособие / М. Р. Арифуллин,  
Г. С. Якупов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2021. – 208 с.  
ISBN

В учебном пособии на доступном уровне изложены фундаментальные вопросы курса общей физики по разделам: электростатика, постоянный ток, постоянное магнитное поле. Структура пособия построена так, что позволяет обучающемуся вести самостоятельную подготовку, подкрепляя её приведенными в тексте контрольными вопросами и решением задач, завершающими каждую главу.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам высшего образования по направлению подготовки 03.03.02 Физика.

УДК 53(075.8)

ББК 22.3я73

ISBN

© Арифуллин М.Р.,  
Якупов Г. С., 2021  
© ОГУ, 2021

## Содержание

Введение.....	5
Глава 1. Постоянное электрическое поле .....	7
§ 1.1 Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда .....	7
§ 1.2 Закон Кулона.....	8
§ 1.3 Электрическое поле.....	18
§ 1.4 Напряжённость электрического поля.....	19
§ 1.5 Принцип суперпозиции электрических полей .....	28
§ 1.6 Графическое изображение электростатических полей .....	34
§ 1.7 Поток вектора напряжённости электрического поля .....	35
§ 1.8 Теорема Гаусса .....	43
§ 1.9 Расчёт электрических полей с помощью теоремы Гаусса .....	55
§ 1.10 Работа сил электростатического поля в случае двух точечных зарядов. Потенциальная энергия .....	63
§ 1.11 Циркуляция вектора напряжённости электрического поля.....	72
§ 1.12 Связь между напряжённостью электростатического поля и потенциалом .....	73
§ 1.13 Проводник в электростатическом поле.....	79
§ 1.14 Электрическая ёмкость, конденсаторы.....	82
§ 1.15 Электрическое поле в диэлектриках .....	99
§ 1.16 Поляризация диэлектрика .....	103
§ 1.17 Электрическое поле в диэлектрике .....	105
Глава 2 Постоянный электрический ток.....	113
§ 2.1 Сила тока, плотность тока .....	113
§ 2.2 Закон Ома для однородного участка цепи.....	119
§ 2.3 Закон Ома в дифференциальной форме.....	125
§ 2.4 Электродвижущая сила.....	126
§ 2.5 Работа электрического тока. Закон Джоуля-Ленца .....	133
§ 2.6 Закон Ома для неоднородной цепи .....	140

§ 2.7 Приборы для измерения силы тока и напряжения .....	147
Глава 3 Введение в магнитные поля .....	155
§ 3.1 Магнитное поле .....	155
§ 3.2 Сила Лоренца .....	157
§ 3.3 Магнитное поле вокруг проводника с током .....	159
§ 3.4 Момент силы, действующий на прямоугольный контур в магнитном поле .....	165
§ 3.5 Магнитная сила, действующая на диполь во внешнем поле .....	169
§ 3.6 Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле .....	171
§ 3.7 Приложения .....	175
§ 3.8 Советы по решению задач .....	178
Решение задач .....	179
Вопросы для самопроверки .....	184
§ 3.9 Задачи для самостоятельного решения .....	184
Глава 4. Постоянное магнитное поле .....	189
§4.1 Закон Био-Савара-Лапласа .....	189
§ 4.2 Сила Ампера для двух параллельных проводов .....	193
§4.3 Закон Ампера или закон полного тока.....	194
§4.4 Магнитные материалы .....	198
§4.5 Намагниченность.....	198
§4.6 Парамагнетизм.....	202
§4.7 Диамагнетизм.....	203
§4.8 Ферромагнетизм .....	204
Дополнительные вопросы .....	206
Задачи для самостоятельного решения .....	206
Список использованных источников .....	208

## Введение

В представленном учебном пособии изложены основные положения из раздела учения об электромагнетизме. Несмотря на то, что электрические и магнитные явления были известны человечеству с незапамятных времен, стремительное развитие данной сферы науки началось только в середине XIX века, когда был решён вопрос о мощных и недорогих источниках энергии.

Электрическую энергию можно транспортировать практически в неограниченном количестве на большие расстояния и с незначительными потерями. Если учесть сравнительную простоту преобразования электроэнергии в другие виды, а также высокий КПД устройств, в которых осуществляется это преобразование при различных мощностях, становится понятно, что использование электроэнергии в промышленности в своё время, привело к технологической революции.

В наши дни искусственное освещение осуществляется с помощью электричества, с его же помощью приводятся в движение автомобили и другие транспортные средства, сигнализация, связь, телевидение и осуществляются почти все количественные измерения в науке и технике. Без электричества было невозможно автоматизировать крупномасштабное производство, удаленно управлять объектами и исследовать космос.

Электричество нашло несколько специальных применений в металлургии (плавка металлов в электрических печах, производство легких металлов), машиностроении (сварка, резка металлов), химии (электролиз), транспорте и т. д. Электрические приборы широко распространены в быту. Не менее важное значение имеют теоретические роли электричества и магнетизма.

Огромное количество явлений объясняет действие электромагнитных сил, в том числе и тех, которые на первый взгляд не имеют ничего общего с электричеством, например, механические (упругость твердых и жидких тел), тепловые (теплопроводность металлов), оптические (показатель преломления) и т. д.

Электрохимические явления, с одной стороны, указывают на тесную связь между материей и электричеством (теория строения материи неразрывно связана с теорией электричества), а с другой – в теорию электромагнетизма входит оптика. Более того электромагнитные явления лежат в основе процессов, происходящих в атоме. Без знания законов электромагнитных явлений изучение строения атомов и атомных ядер было бы невозможно. Таким образом, учение об электромагнетизме занимает одно из центральных мест в современной физике. Необходимо отметить, что российские ученые занимают в этой области очень почетное место.

В связи с этим необходимо вспомнить имена М.В. Ломоносова и Г.В. Рихмана, исследовавших атмосферное электричество и объяснивших механизм возникновения молнии; открытие электрической дуги В.В. Петровым; Э.Х. Ленца, изучавшего тепловое действие электрического тока и открывшего закон, которому подчиняются индукционные токи; Б.С. Якоби, создателя первого электродвигателя, а также изобретение им гальванического покрытия; А.Г. Столетова, который открыл закономерности фотоэффекта; открывшего первый практический способ освещения с помощью электрической дуги П.Н. Яблочкова; изобретателя лампы накаливания А. Н. Лодыгина; создателя радио А. С. Попова и многих других учёных, которые внесли вклад в развитие не только российской, но и мировой науки.

В XX веке российские учёные также добились очень больших успехов в области электрических и магнитных явлений. Было исследовано множество вопросов, которые имели не только значительное теоретическое, но и практическое значение. В частности, физика диэлектриков, полупроводников, магнитов, газового разряда и высокотемпературной плазмы, лазерные технологии и многое другое. Следовательно, раздел физики, посвященный изучению электрических и магнитных явлений, имеет важное значение для изучения науки и техники.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам специалитета и бакалавриата, изучающих курс общей физики. Издание может оказаться полезным также учащимся профильных (физико-математических) классов школ в качестве дополнительной литературы.

# Глава 1. Постоянное электрическое поле

## § 1.1 Электрический заряд. Закон сохранения электрического заряда

Электростатические явления давно знакомы человечеству. Уже в древней Греции было известно, что после натирания о шерстяную ткань янтаря, он приобретал способность притягивать к себе волоски шерсти. В переводе с греческого языка электрон – это янтарь. Соответственно, тот раздел физики, который занимается изучением явлений, так или иначе связанных с электризацией тел, стал называться электричеством. Кроме того, электроном называют частицу, которая несёт элементарный электрический заряд.

«Заряд» является одним из важных понятий в физике. Под зарядом понимается свойство объекта принимать участие в различных физических взаимодействиях. Таким образом, электрический заряд – это способность тела принимать участие в электромагнитных взаимодействиях.

Систематическое изучение электрических явлений началось в конце XVIII в. В частности, было установлено, что в природе существует два «сорта» электрических зарядов, один из которых получил название «стеклянный», а второй «смоляной», поскольку первый тип заряда возникал при натирании стеклянной палочки о сукно, а второй – при натирании эбонитовой палочки о шерсть. Кроме того, было установлено эмпирическим путем, что заряды одного типа отталкиваются друг от друга, а разного типа притягиваются друг к другу. Американский политический деятель, дипломат, изобретатель, писатель, журналист Бенджамин Франклин предложил другую терминологию для наименования двух видов электрического заряда, которой пользуются и сегодня: если потереть о шёлк стеклянную палочку, то возникший на ней заряд называют «положительным», тогда как, заряд, возникающий на эбонитовой палочке при натирании её о шерсть называют «отрицательным». На рисунке 1.1 показано взаимодействие зарядов разного знака. Разные по знаку заряды притягиваются друг к другу, одинаковые по знаку заряды отталкиваются друг от друга.

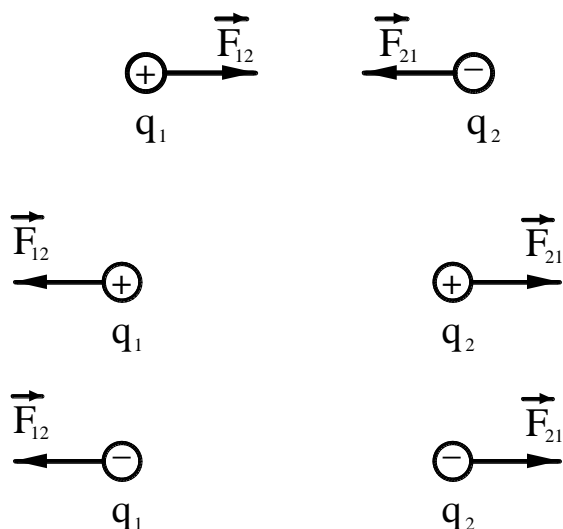


Рисунок – 1.1 Взаимодействие точечных электрических зарядов

В дальнейшем было экспериментально установлено, что в природе существует минимально возможный заряд, меньше которого зарядов не существует. Этот заряд был назван элементарным, а носителем отрицательного элементарного заряда является электрон « $-e$ ». Носителем положительного элементарного заряда является протон « $+e$ ». В системе СИ величина элементарного заряда равна  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Заряд любого тела может отличаться от элементарного заряда ( $2e$ ,  $3e$ ,  $4e$  и т. д.), то есть, как принято говорить, электрический заряд обладает свойством дискретности: он может изменяться только на величину, равную элементарному заряду. По отношению к выбору системы отсчёта электрический заряд является величиной инвариантной, то есть от выбора системы отсчёта его величина не зависит.

Еще одним фундаментальным свойством электрического заряда является то, что суммарный заряд электрически изолированной системы остается постоянным. Это так называемый закон сохранения электрического заряда.

## § 1.2 Закон Кулона

Поскольку физика относится к точным наукам, нам необходимо ввести выражение, которое количественно описывало бы силовое взаимодействие



точечных зарядов. Такое выражение было получено в 1795 году французским физиком Шарлем Кулоном.

Прежде чем вводить данное выражение, необходимо дать определение точечного заряда. Под **точечным зарядом** понимают такое заряженное тело, размеры и форма которого никак не влияют на решение задачи. То есть такое тело можно просто считать заряженной точкой. Кроме того, чтобы то или иное тело могло считаться точечным зарядом, его размеры должны быть малы по сравнению с расстояниями от данного тела до других заряженных тел. Точечный заряд относится к физическим моделям, так же, например, как в механике моделью считалась материальная точка.

Ш. Кулоном было установлено, что точечные заряды взаимодействуют в вакууме так, что сила их взаимодействия пропорциональна произведению модулей этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – модули взаимодействующих зарядов;

$k$  – коэффициент пропорциональности;

$r$  – расстояние между зарядами.

В том случае, когда взаимодействие точечных зарядов происходит в изотропной среде, закон Кулон будет выглядеть следующим образом:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \quad (1.2)$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды.

Под диэлектрическая проницаемость среды понимается показывающая как сила взаимодействия зарядов в данной среде  $F$  отличается от их силы

взаимодействия в вакууме  $F_0: \varepsilon = \frac{F_0}{F}$ . Диэлектрическая проницаемость как это следует из её определения не имеет размерности.

Поскольку сила – это векторная величина, то её направление следует знать. Экспериментальным путём было выяснено, что силы, с которыми взаимодействуют между собой точечные заряды направлены вдоль линии, соединяющие заряды (см. рис. 1.1). Тогда в векторной форме закон Кулона может быть записан следующим образом:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (1.3)$$

где  $\frac{r}{r}$  – единичный вектор,  $r$  – радиус-вектор, построенный таким образом, что он направлен из точки, где находится заряд  $q_1$ , в ту точку, где расположен второй заряд  $q_2$ .

Если  $F < 0$ , то такое взаимодействие имеет характер притяжения, если  $F > 0$  – отталкивания. Формулу (1.3) можно применять и для случая взаимодействия заряженных шаров (то есть, когда понятием точечного заряда пользоваться нельзя). В этом случае вместо  $r$  берут расстояние между центрами заряженных шаров.

Все математические выражения мы будем записывать в системе СИ, в которой единицей электрического заряда служит кулон (Кл). Поскольку в системе СИ единица кулон вводится через другую единицу – ампер (А) (единица силы тока), следовательно, сила, с которой взаимодействуют точечные заряды должна быть выражена в ньютонах (Н). При подстановке в формулу (1.3) величины заряда в кулонах и расстояния между зарядами в метрах, мы не получим силу взаимодействия между зарядами в ньютонах. Для того, чтобы устранить это несоответствие единиц измерения, необходимо выбрать нужное значение коэффициента  $k$  с правильной размерностью. Экспериментально было установлено, что заряды равные 1 Кл, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, должны взаимодействовать с силой, равной  $9 \cdot 10^9$  Н. После подстановки значения заряда, расстояния и силы в формулу (1.3) получим значение для коэффициента  $k$ :

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}. \quad (1.4)$$

Иногда вместо коэффициента  $k$  используют выражение:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.5)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, равная  $8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Фарад – единица электрической емкости. Размерности  $\frac{\text{Ф}}{\text{м}}$  и  $\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$  эквивалентны друг другу.

Рассмотрим примеры решения задач.

**Задача 1.** Два одинаковых шарика массой  $m = 20$  г, находятся в вакууме на некотором расстоянии друг от друга. Какие равные заряды необходимо поместить на шарики, чтобы их гравитационное притяжение компенсировалось электростатическим взаимодействием?

Дано:

$$m = 20 \text{ г}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$$

$$F_{\text{к}} = F_{\text{гр}}$$

Решение:

Между двумя шариками равной массы  $m$ , которые находятся на некотором расстоянии  $r$  друг от друга, действует сила всемирного тяготения

Найти:

$$F_{\text{гр}} = G \frac{m^2}{r^2}, \quad (1)$$

$q - ?$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

Исходя из условия задачи шарики необходимо зарядить одноименными одинаковыми по величине электрическими зарядами  $q$ , тогда между ними возникнет кулоновская сила отталкивания:

$$F_k = k \frac{q^2}{r^2}, \quad (2)$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ .

По условию задачи эти силы друг друга уравнивают, то есть:

$$k \frac{q^2}{r^2} = G \frac{m^2}{r^2}. \quad (3)$$

Отсюда заряд шариков, который необходимо сообщить шарикам, чтобы сила гравитационного взаимодействия уравновесила силу Кулона равен:

$$q = m \sqrt{\frac{G}{k}}. \quad (4)$$

$$q = 172 \text{ пКл.}$$

**Задача 2.** Два одинаковых шарика массой  $m$  каждый подвешены на нитях, имеющих одинаковую длину. Шарикам сообщают электрический заряд, после чего они отклоняются в воздухе на угол  $\alpha$ . После этого их поместили в жидкий диэлектрик, имеющий диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  и плотность  $\rho_1$ . Чему равна плотность материала шарика  $\rho$ , если угол их расхождения в воздухе и диэлектрике одинаковый?

Дано:

$\rho_1$

$\epsilon$

$m$

$\alpha$

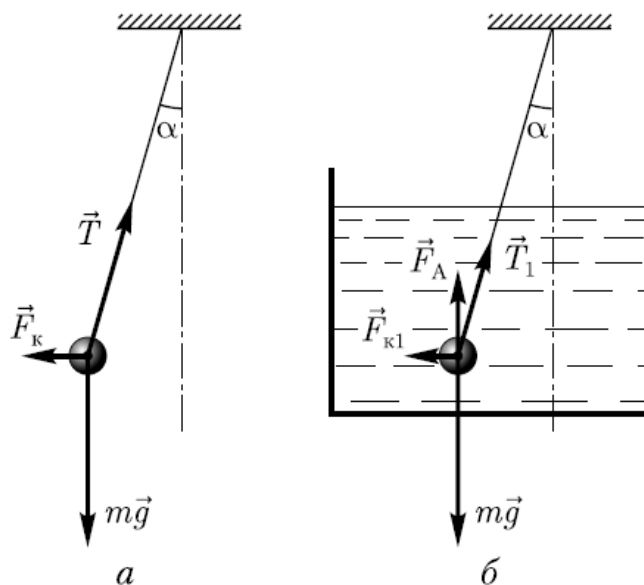
Решение:

Сначала рассмотрим взаимодействие шариков в воздухе.

Так как плотность воздуха сравнительно мала по величине, то можно пренебречь действием выталкивающей силы и тогда сил, действующих на

Найти:  
 $\rho - ?$

шарик в данном случае, будет три: сила тяжести  $mg$ , кулоновская сила  $F_K$  и сила натяжения нити  $T$  (рисунок *а*)



Вся система находится в состоянии равновесия, следовательно, можно записать:

$$F_K + mg + T = 0.$$

Теперь шарик погрузили в жидкий диэлектрик. Действием силы Архимеда в данном случае пренебречь уже нельзя, поэтому на шарик будет действовать четыре силы: выталкивающая сила  $F_A$ , сила тяжести  $mg$ , кулоновская сила  $F_{K1}$  и сила натяжения нити  $T_1$  (рисунок *б*).

Шарики также пребывают в состоянии равновесия, как и в первом случае, поэтому:

$$mg + F_{K1} + T_1 + F_A = 0.$$

Сила электростатического отталкивания шариков в воздухе равна:

$$F_K = mgtg\alpha, \quad (1)$$

А в диэлектрике, соответственно,

$$F_{K1} = mg - F_A tg\alpha. \quad (2)$$

Так как наличие диэлектрика приводит к уменьшению силы взаимодействия между зарядами в  $\varepsilon$  раз, то

$$F_{K1} = \frac{F_K}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$\frac{F_K}{\varepsilon} = mg - F_A tg\alpha. \quad (4)$$

Разделим выражение (4) на (1):

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{mg - F_A}{mg} = 1 - \frac{F_A}{mg}. \quad (5)$$

Выталкивающая сила

$$F_A = \rho_1 Vg.$$

Масса шарика  $m = \rho V$ ,

где  $V$  – объём шарика.

Подставив полученные выражения в (5)

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{\rho_1}{\rho}$$

Получим плотность материала шарика

$$\rho = \frac{\varepsilon \rho_1}{\varepsilon - 1}$$

**Задача 3.** На расстоянии  $l = 90$  см друг от друга находятся два положительных заряда  $q_1 = 1$  мкКл и  $q_2 = 4$  мкКл, которые могут перемещаться вдоль соединяющей их прямой. Где на этой прямой должна находиться точка, в которую необходимо поместить отрицательный заряд  $q_3$  так, чтобы все заряды оказались в равновесии? Чему равна величина заряда  $q_3$ ?

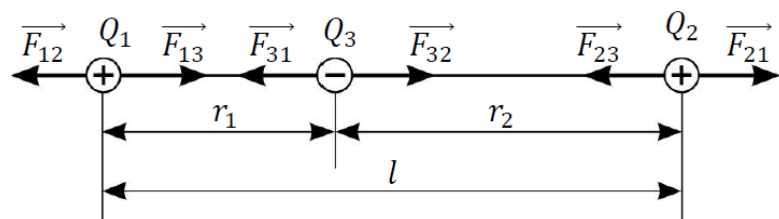
Дано:

$$q_1 = 1 \text{ мкКл}$$

$$q_2 = 4 \text{ мкКл}$$

$$l = 90 \text{ см}$$

Решение:



Найти:

$$q_3 - ?$$

Изобразим на рисунке к задаче силы  $F_{12}$  и  $F_{21}$  взаимодействия (в данном случае отталкивания) зарядов  $q_1$  и  $q_2$ . Чтобы заряды  $q_1$  и  $q_2$  находились в равновесии, необходимо скомпенсировать эти силы силами им противоположно направленными  $-F_{13}$  на первый заряд и  $F_{23}$  – на второй заряд. Такие силы создаст отрицательный заряд  $q_3$ , который должен располагаться между зарядами  $q_1$  и  $q_2$ .

Условие равновесия зарядов:

$$F = 0$$

Для заряда  $q_1$

$$F_{12} + F_{13} = 0. \quad (1)$$

Для заряда  $q_2$

$$F_{21} + F_{23} = 0. \quad (2)$$

Для заряда  $q_3$

$$F_{31} + F_{32} = 0. \quad (3)$$

Силы взаимодействия между зарядами подчиняются третьему закону Ньютона:

$$F_{12} = F_{21}, F_{13} = F_{31}, F_{23} = F_{32}.$$

С учетом равенства модулей сил и условий равновесия зарядов в соответствии с выражениями (1), (2) и (3) получаем, что модули всех сил парного взаимодействия зарядов равны.

Введем обозначения для расстояний между зарядами:

$r_1$  – расстояние между зарядами  $q_3$  и  $q_1$ ,

$r_2$  – расстояние между зарядами  $q_3$  и  $q_2$ ,

кроме того, очевидно, что  $r_2 = l - r_1$ .

Применив закон Кулона получим модули сил:



$$F_{13} = F_{31} = \frac{kq_1q_3}{r_1^2}, \quad (4)$$

$$F_{23} = F_{32} = \frac{kq_2q_3}{r_2^2} \quad (5)$$

и

$$F_{12} = F_{21} = \frac{kq_1q_2}{l^2}. \quad (6)$$

Приравниваем выражения (4) и (5)

$$\frac{kq_1q_3}{r_1^2} = \frac{kq_2q_3}{r_2^2},$$

после сокращения получаем

$$\frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{l - r_1}^2. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) относительно  $r_1$  получаем

$$l - r_1 \sqrt{q_1} = r_1 \sqrt{q_2}$$

$$r_1 = l \frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}$$

$$r_1 = 30 \text{ см.}$$

Следовательно, заряд  $q_3$  необходимо расположить на расстоянии  $r_1 = 30$  см от заряда  $q_1$ .

Величину заряда  $q_3$  можно найти, приравняв модули сил  $F_{12}$  и  $F_{13}$ :

$$\frac{kq_1q_3}{r_1^2} = \frac{kq_1q_2}{l^2}$$

Сократив обе части выражения на величину  $q_1$ , получим:

$$\frac{q_3}{r_1^2} = \frac{q_2}{l^2}$$

$$q_3 = q_2 \frac{r_1^2}{l^2}$$

Вычислив величину заряда  $q_3$ , получаем  $q_3 = 0,44$  мкКл.

Задания для самостоятельного решения.

1. На нитях длиной  $l = 40$  см подвешены два одинаковых шарика радиусом  $R$  и массой  $m$ , так, что их поверхности соприкасаются. Шарикам сообщили заряд  $q = 1,2$  мкКл каждому, после чего они оттолкнулись друг от друга, и нити образовали угол  $2\alpha = 120^\circ$ . Считая, что  $R \ll l$ , определите массу шарика и силу натяжения нити.

2. Два заряженных шарика одинакового радиуса  $R$  и массы  $m$  висят на нитях одинаковой длины  $l$  погружают в жидкий диэлектрик, плотность которого  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup> и диэлектрическая проницаемость равна 2. Чему равна плотность материала шариков  $\rho_0$ , если они расходятся в воздухе и в диэлектрике на один и тот же угол. Считать, что  $R \ll l$ .

3. Гравитационное притяжение двух капель воды радиусом 0,1 мм, имеющих один и тот же заряд компенсируется их электростатическим отталкиванием. Чему равны заряды капель. Плотность воды 1000 кг/м<sup>3</sup>.

### § 1.3 Электрическое поле

На этапе зарождения учения об электричестве в физике существовало два противоположных по своей сути взгляда на взаимодействие заряженных тел. Одна

из концепций носила название теории дальнего действия и утверждала, что гравитационные и электрические силы через пустоту распространяются мгновенно, без промежуточного агента или посредника. Другая концепция, называемая ближнедействием, у истоков которой стояли Р. Декарт, О. Френель, М. Фарадей, а впоследствии и Дж. Максвелл, базировалась на понятии пространства, как протяженности вещества и эфира, в котором свет распространялся бы с конечной скоростью в виде волн. Похожей точки зрения придерживался русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов. Одним из основных отличий друг от друга названных выше теорий является существование предела скорости распространения взаимодействий (а конкретнее, полей и частиц). Эту скорость называют скоростью света в вакууме. Впоследствии в рамках этой концепции появилось понятие поля, через которое и осуществляется взаимодействие.

Стоит отметить, что в современной физике понятия дальнего действия и ближнедействие применяются несколько в ином смысле: так, гравитационное и электромагнитное поля называют дальнедействующими полями, а короткодействующими – поля ядерного (сильного) и слабого взаимодействий.

В современной физике считается, что покоящиеся электрические заряды на расстоянии взаимодействуют посредством электрического поля. Электрический заряд создает в пространстве электрическое поле, которое проявляет себя таким образом, что оказывает силовое воздействие на любой электрический заряд, помещенный в него.

## **§ 1.4 Напряжённость электрического поля**

Поскольку электрическое поле проявляет себя за счёт силового действия на заряды, то характеристика поля должна быть выражена через эту силу. Для этого нам понадобится понятие пробного заряда, с помощью которого можно измерить данную силу.

**Пробным** зарядом принято называть точечный положительный заряд, который не должен искажать электростатическое поле при помещении его туда, следовательно, величина пробного заряда должна быть очень малой.

При помещении пробного заряда в интересующую нас область поля на него начнет действовать сила со стороны электростатического поля. Математически эту силу можно представить в виде произведения величины пробного заряда на отношение, которое, в свою очередь, зависит только от величины создавшего поля заряда и расстояния до него:

$$E = \frac{F}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.6)$$

Подстановка этого выражения в формулу для кулоновской силы (1.1) даст нам выражение для напряжённости поля точечного заряда в скалярной форме:

$$E = k \frac{q}{r^2}. \quad (1.7)$$

Векторная физическая величина, определяемая как отношение силы, которая действует на пробный заряд, к его величине, получила название **напряжённость электрического поля**.

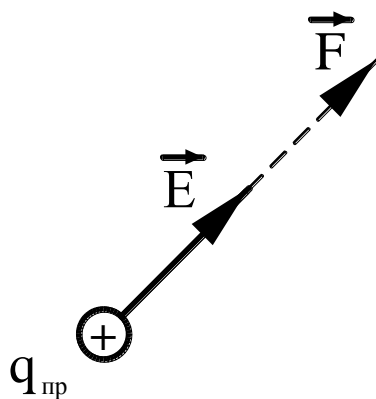


Рисунок 1.2 – Действие силы на пробный электрический заряд

Удобно считать пробный заряд положительным, поэтому вектор силы, которая действует на пробный заряд со стороны электростатического поля и вектор напряжённости электростатического поля должны совпадать по направлению.

В системе СИ единица напряжённости имеет наименование Н/Кл (ньютон на кулон), тем не менее, чаще пользуются другой размерностью: В/м (вольт на метр). Эта размерность указывает на связь напряжённости электрического поля с другой его характеристикой – потенциалом.

Если известна напряжённость электрического поля в какой-либо точке пространства, то несложно найти силу, которая действует на неподвижный точечный заряд  $q$ , расположенный в данной точке:

$$F = qE. \quad (1.8)$$

**Задача 1.** Шарик из меди ( $\rho = 8930 \text{ кг/м}^3$ ) радиусом  $r = 0,5 \text{ см}$  погружают в масло ( $\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$ ). В однородном электростатическом поле напряжённостью  $E = 4,25 \cdot 10^5 \text{ В/м}$  шарик оказывается взвешенным в масле. Определите заряд шарика, если поле направлено вертикально вверх.

Дано:

$$\rho = 8930 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_1 = 800 \text{ кг/м}^3$$

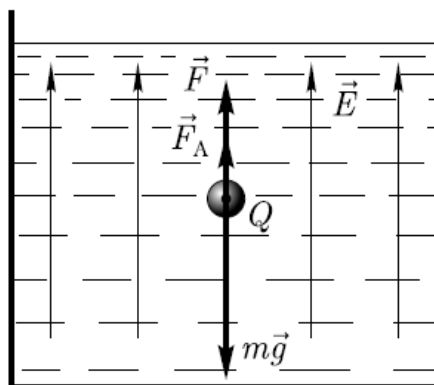
$$r = 0,5 \text{ см}$$

$$E = 4,25 \cdot 10^5 \text{ В/м}$$

Найти:

$$q - ?$$

Решение:



Выясним какие силы действуют на шарик в масле. Их три, это:

1) сила тяжести

$$mg = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 g;$$

2) выталкивающая сила (сила Архимеда)

$$F_A = \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g;$$

3) сила электростатического поля

$$F = qE,$$

направленная вертикально вверх (эта сила сонаправлена с вектором  $E$ ).

По условию задачи шарик находится в состоянии равновесия, поэтому

$$mg = F_A + F.$$

Подставим выражения для сил в формулу (1), получим:

$$\rho \frac{4}{3} \pi r^3 g = \rho_1 \frac{4}{3} \pi r^3 g + qE,$$

откуда заряд шарика будет найден как:

$$q = \frac{4\pi r^3}{3E} (\rho - \rho_1) g$$

$$q = 10 \text{ нКл.}$$

**Задача 2.** В вершинах равностороннего треугольника со стороной  $r = 9$  см размещены два точечных заряда  $q_1 = 10$  нКл и  $q_2 = -15$  нКл. Найдите напряжённость электростатического поля в третьей вершине.

Дано:

$$q_1 = 10 \text{ нКл}$$

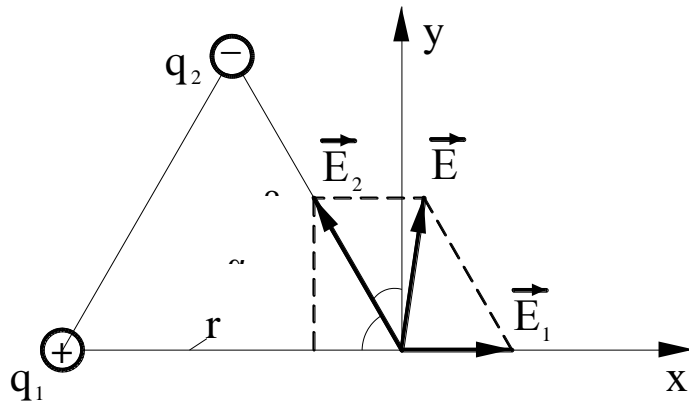
$$q_2 = -15 \text{ нКл}$$

$$r = 9 \text{ см}$$

Решение:

Найти:

$$E - ?$$



Заряды  $q_1$  и  $q_2$  расположены по отношению к точке А, как показано на рисунке.

Для расчёта напряжённости электростатического поля в интересующей нас точке применим принцип суперпозиции:

$$E = E_1 + E_2, \quad (1)$$

где  $E_1$  – напряжённость в точке А, поля заряда  $q_1$ ,

$E_2$  – напряжённость в точке А, поля заряда  $q_2$ .

Пользуясь принципом суперпозиции А, можно найти проекции вектора напряжённости поля в точке А на координатные оси  $x$  и  $y$ :

$$E_x = E_{1x} + E_{2x}, \quad (2)$$

$$E_y = E_{1y} + E_{2y}. \quad (3)$$

Выберем направление оси  $x$  вдоль вектора  $E_1$ , при этом вектор  $E_2$  образует с координатными осями  $x$  и  $y$  углы, которые несложно найти:  $\alpha = 60^\circ$  и  $\beta = 90 - \alpha = 30^\circ$ .

Следовательно, проекции результирующего вектора  $E$  ( $E_x$  и  $E_y$ ) на координатные оси  $x$  и  $y$ , будут определяться как:

$$E_x = E_1 - E_2 \cos 60^\circ,$$

$$E_y = E_2 \cos 30^\circ.$$

В результате получаем:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{E_1 - \frac{1}{2}E_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}E_2^2}. \quad (4)$$

После несложных математических преобразований можно получить следующие выражения:

$$E = \sqrt{\frac{kq_1}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{kq_2}{r^2}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{kq_2}{r^2}^2},$$

$$E = \frac{k}{r^2} \sqrt{q_1 - q_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} q_2^2}.$$

Вычисляем с помощью последнего полученного выражения напряжённость электростатического поля в точке А, помня при этом, что нужно подставлять модуль отрицательного заряда  $q_2$ , поскольку знак его уже учтен в



направлении вектора  $E_2$ , получаем  $E = 17$  кВ/м.

Найти модуль вектора в точке А можно и по-другому, с помощью теоремы косинусов. Предлагаем вам сделать это самостоятельно.

**Задача 3.** В вершина квадрата со стороной 5 см поместили одинаковые положительные заряды  $q = 2$  нКл. Чему равна напряжённость электрического поля: 1) в центре квадрата; 2) в середине одной из его сторон.

Дано:

$$a = 5 \text{ см}$$

$$q = 2 \text{ нКл}$$

Найти:

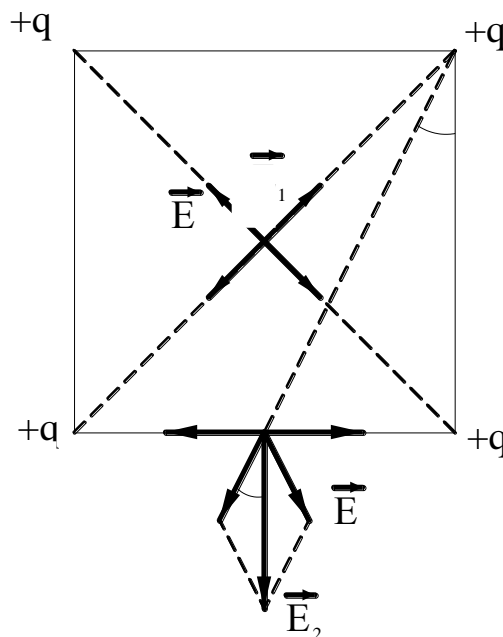
$$E_1 - ?$$

$$E_2 - ?$$

Решение:

1) В центре квадрата напряжённость электростатического поля равна нулю из соображений симметрии  $E_1 = 0$ .

2) В середине стороны квадрата напряжённость электростатического поля можно найти следующим образом: так как квадрат обладает свойством симметрии, нам достаточно рассмотреть какую-то одну его сторону, и точку, тогда в точке, находящейся на середине этой стороны (см. рисунок),



построим векторы напряжённости электростатических

полей от зарядов, находящихся в вершинах квадрата.

Так как модули векторов напряжённости электростатических полей зарядов, расположенных в вершинах квадрата, соответствующих этой стороне, имеют одно и тоже значение, но сами векторы напряжённости направлены противоположно, то они будут компенсировать друг друга.

Модули векторов напряжённости полей двух зарядов, которые не лежат на этой прямой будут равны  $E \cos \alpha$ , а модуль вектора напряжённости электростатического поля в точке, расположенной в середине стороны, будет равен  $E_2 = 2E \cos \alpha$ .

Расстояние от каждого из зарядов до интересующей нас точки равно

$$r = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

где  $a$  – сторона квадрата.

Напряжённость поля в точке, расположенной на расстоянии  $r$  от заряда точечного вычисляется по формуле

$$E = k \frac{q}{r^2}.$$

Из этих двух выражений можно получить следующий результат:

$$E = k \frac{q}{a^2 + \frac{a^2}{4}}$$

Тогда напряжённость поля в интересующий нас точке равна:

$$E = 2k \frac{q}{a^2 + \frac{a^2}{4}} \cos\alpha,$$

где  $\cos\alpha = \frac{a}{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{2}{5}$ , тогда

$$E = 2k \frac{q}{a^2 + \frac{a^2}{4}} \frac{2}{5} = 4k \frac{q}{a^2 + \frac{a^2}{4}} \frac{1}{5}.$$

Подставив числовые значения величин, данных в условии задачи, получим:

$$E = 10,3 \text{ кВ/м.}$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В вершинах равностороннего треугольника расположены три точечных отрицательных заряда  $q = 3$  нКл. Какой положительный заряд  $q_0$  следует поместить в центре этого треугольника, для того, чтобы вся система оказалась в равновесии?
2. Два точечных заряда  $q_1 = 2$  нКл и  $q_2 = -3$  нКл наводятся на расстоянии 20 см в вакууме. Определите напряжённость электростатического поля в точке А, которая находится на расстоянии  $r_1 = 15$  см от первого заряда и расстоянии  $r_2 = 10$  см от второго заряда.
3. Тонкое кольцо, изготовленное из проволоки, имеет радиус  $R = 4$  см и заряжено с линейной плотностью  $\tau = 1$  нКл/м. Вычислите напряжённость электростатического поля в вакууме на прямой, проходящей через центр кольца, в точке, находящейся на расстоянии  $r = 6$  см от центра кольца.

## § 1.5 Принцип суперпозиции электрических полей

Электростатическое поле может быть в общем случае создано системой точечных зарядов. В данной ситуации применим принцип независимости действия сил (известный как **принцип суперпозиции**). Взаимодействие любой пары точечных зарядов можно рассматривать независимо от других зарядов и их полей. То есть, если систему образуют  $N$  электрических точечных зарядов, мы можем считать, что сила, которая действует на некий заряд  $k$  этой системы со стороны других зарядов, определяется как:

$$F_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N F_{ki}, \quad (1.9)$$

где  $F_{ki}$  определяется из закона Кулона.

Это проявления принципа суперпозиции (или принципа независимости действия сил) в электростатике.

Это утверждение носит название **принципа суперпозиции электрических полей**. Согласно выражению (1.9) можно утверждать, что если электростатическое поле создается системой из  $N$  точечных электрических зарядов, то напряжённость электрического поля такой системы имеет формулу:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i \quad (1.10)$$

На рисунке 1.3 принцип суперпозиции электрических полей в некой точке изображен для случая электростатического поля, образованного двумя точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$ .

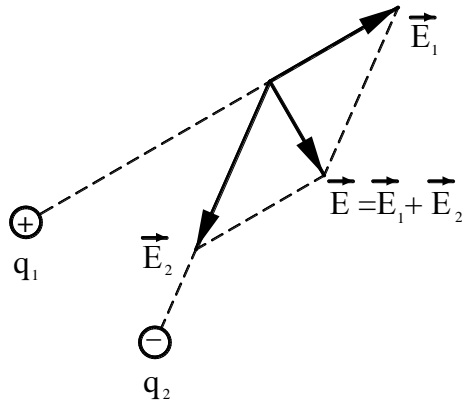


Рисунок 1.3 – Использование принципа суперпозиции для нахождения напряжённости поля двух разноименных точечных зарядов

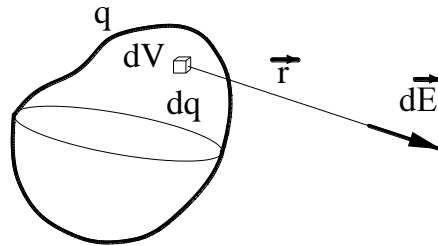


Рисунок 1.4 – Принцип суперпозиции электрических полей для произвольной конфигурации системы электрических зарядов

Для расчёта напряжённости электрического поля произвольной системы электрических зарядов необходимо разбить эту систему на очень малые доли  $dq$ , найти напряжённость поля каждой доли  $\Delta E$  и найти векторную сумму с помощью выражения (1.9). Данная ситуация изображена на рисунке 1.4. В этом случае переходят к разбиению заряженного тела на бесконечно малые объёмы и вычисляют напряжённость результирующего поля следующим образом:

$$E = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \Delta E_i = \int_V dE. \quad (1.11)$$

**Задача 1.** На расстоянии  $r$  друг от друга в воздухе находятся два одинаковых положительных точечных заряда. Чему равна напряжённость электрического поля в точке, которая находится на одном и том же расстоянии  $r$  от этих зарядов.

Дано:

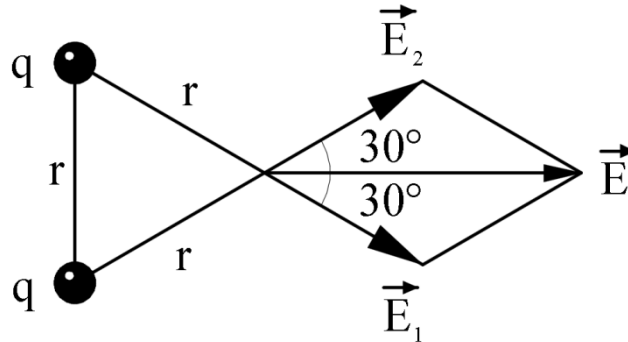
Решение:

$R$

$q$

Найти:

$E - ?$



В соответствии с принципом суперпозиции полей:

$$E = E_1 + E_2.$$

Модули напряжённостей полей зарядов равны

$$E = k \frac{q}{r^2}.$$

Диагональ параллелограмма, построенного на векторах  $E_1$  и  $E_2$ , есть напряжённость результирующего поля, модуль которой равен

$$E = 2E_1 \cos 30^\circ = 2k \frac{q}{r^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = k \frac{q \sqrt{3}}{r^2}.$$

**Задача 2.** Определите напряжённость электростатического поля в точке  $O$ , являющейся центром равностороннего треугольника со стороной  $a = 3$  см, в вершины которого поместили три точечных заряда  $q_1 = q_2 = 10^{-9}$  Кл,  $q_3 = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл.

Дано:

$$q_1 = q_2 = 10^{-9} \text{ Кл}$$

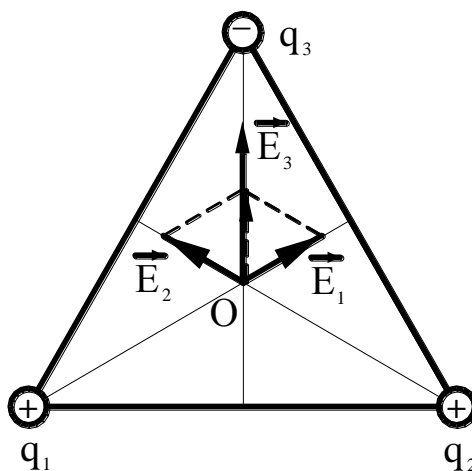
$$q_3 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$a = 3 \text{ см}$$

Найти:

$$E_0 - ?$$

Решение:



В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей:

$$E_0 = E_1 + E_2 + E_3,$$

при этом

$$E_1 = E_2 = k \frac{q_1}{r^2}$$

и

$$E_3 = k \frac{q_3}{r^2}.$$

Кроме того

$$r = \frac{a}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$q_3 = 2q_1.$$

На рисунке показаны векторы напряжённостей  $E_1, E_2, E_3$ . Сначала сложим векторы  $E_1$  и  $E_2$ . Как видно из рисунка, угол между этими векторами равен  $120^\circ$ . Следовательно, модуль суммарного вектора равен модулю вектора  $E_1$ , сонаправлен с вектором  $E_3$ . Окончательно запишем:

$$E_0 = E_1 + E_3 = k \frac{q_1}{r^2} + 2k \frac{q_1}{r^2} = 3k \frac{q_1}{r^2} = 9k \frac{q_1}{r^2}.$$

Подставив данные из условия задачи, получим значение напряжённости электростатического поля в точке О, равное  $9 \cdot 10^4$  В/м.

**Задача 3.** Два неподвижных точечных заряда  $q_1 = -2 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = 10^{-9}$  Кл находятся на расстоянии 1 м. Где находится точка, в которой напряжённость электрического поля равна нулю?

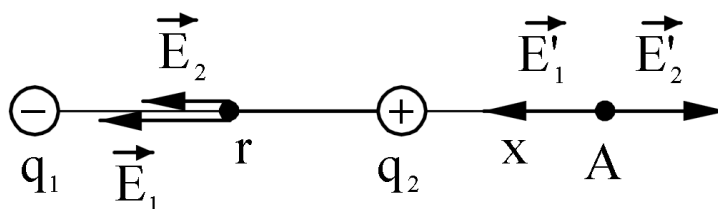
Дано:

$$q_1 = -2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_2 = 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$r = 1 \text{ м}$$

Решение:



Найти:

$x$  – ?

Из рисунка к задаче хорошо видно, что на отрезке между зарядами напряжённость поля не может быть равна нулю, так как векторы напряжённостей полей, созданных зарядами  $q_1$  и  $q_2$  будут сонаправлены.

В результате напряжённость поля может стать равной нулю справа или слева от зарядов на линии, проходящей через эти заряды. Поскольку модуль первого заряда больше, чем модуль второго заряда, нужная нам точка находится ближе ко второму заряду, то есть справа от



зарядов (в случае расположения зарядов  $q_1$  и  $q_2$  приведенном на рисунке к задаче). Расстояние от второго заряда до точки А обозначим через  $x$ .

Учитывая, что  $E_1' = E_2'$  можно записать:

$$k \frac{2q_2}{(r+x)^2} = k \frac{q_2}{x^2}.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$\frac{(x+r)^2}{x^2} = 2$$

$$\frac{x+r}{x} = \pm \sqrt{2}.$$

Окончательно  $x = \frac{r}{\sqrt{2}-1} \approx 2,4$  м.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Для находящейся в вакууме проводящей сферы радиусом  $R = 0,2$  м и несущей заряд  $q = 1,8 \cdot 10^{-4}$  Кл определите: 1) модуль напряжённости электрического поля  $E$  на её поверхности; 2) модуль напряжённости  $E_1$  электрического поля в точке, находящейся на расстоянии  $r_1 = 10$  м от центра сферы; 3) модуль напряжённости  $E_0$  в центре сферы.

2. В однородное электрическое поле напряжённостью  $E_0 = 3$  кН/Кл поместили точечный заряд  $q = 4 \cdot 10^{-10}$  Кл. Найдите напряжённость электрического поля в точке А, расположенной на расстоянии  $r = 3$  см от точечного заряда. Соединяющий заряд и точку А отрезок, перпендикулярен линиям напряжённости однородного электрического поля.

3. Одинаковые положительные заряды  $q = 2$  нКл находятся в вершинах равностороннего треугольника. В центр треугольника необходимо поместить

отрицательный заряд  $q_1$ , чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силу отталкивания положительных зарядов. Определите величину этого отрицательного заряда.

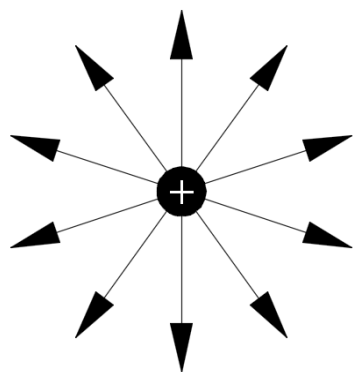
## § 1.6 Графическое изображение электростатических полей

Чтобы визуально представить электростатическое поле, используют так называемые линии напряжённости электрического поля (также известные как «силовые линии»). Силовые линии – это воображаемые линии, касательные, которые в любой точке совпадают с направлением напряжённости электростатического поля для данной точки. Началом для этих линий служат положительные электрические заряды далее они уходят в бесконечность или заканчиваются на отрицательных электрических зарядах. В областях пространства, где модуль напряжённости электрического поля больше, линии представлены с большей плотностью, где меньше – с меньшей плотностью, так что по густоте линий можно судить о модуле напряжённости, а именно – густота линий должна быть пропорциональна модулю напряжённости электростатического поля.

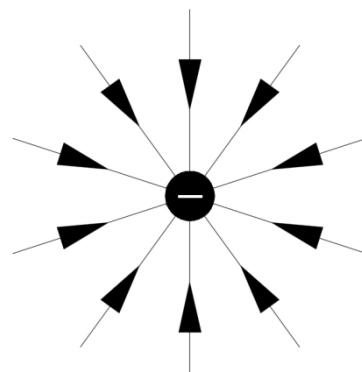
На рисунках 1.5 и 1.6 показаны силовые линии для точечных положительного и отрицательного зарядов, а также для двух точечных зарядов, разноименных и одноименных.

Линии напряжённости имеют

- 1) начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или на бесконечности;
- 2) не могут пересекаться, так как в случае их пересечения направление вектора напряжённости в этой точке было бы неопределённым;
- 3) по густоте силовых линий можно судить о величине напряжённости поля в данной точке пространства.



a)

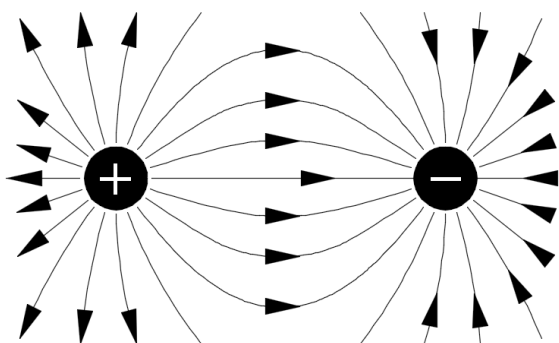


б)

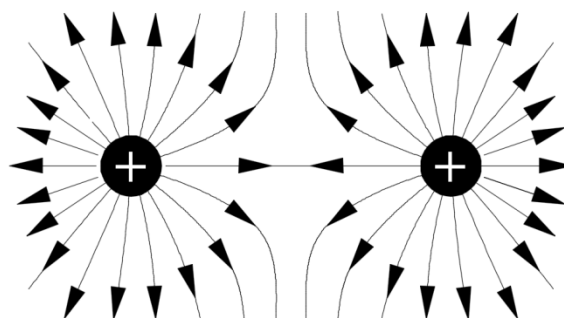
Поле положительного точечного заряда

Поле отрицательного точечного заряда

Рисунок 1.5 – Силовые линии электростатических полей положительного и отрицательного точечных зарядов



a)



б)

Силовые линии электростатического поля двух разноименных точечных зарядов

Силовые линии электростатического поля двух одноименных точечных зарядов

Рисунок 1.6 – Силовые линии электростатических полей положительного и отрицательного точечных зарядов

### § 1.7 Поток вектора напряжённости электрического поля

Предположим, что для каждой точки пространства известно значение напряжённости электрического поля  $E$ . Выделим в пространстве элементарную площадку  $\Delta S$ , которая должна иметь настолько малые размеры, что в её пределах

вектор напряжённости электрического поля можно считать постоянным. Ориентация площадки в пространстве определяется вектором нормали  $n$  к ней. Удобно считать нормаль единичной, то есть  $n = 1$ .

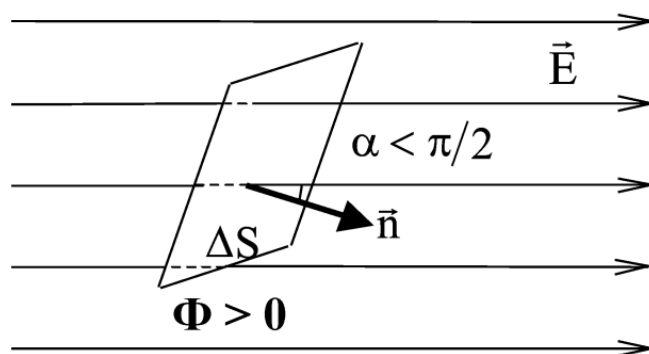


Рисунок 1.6а – Ориентация единичной нормали к элементарной площадке

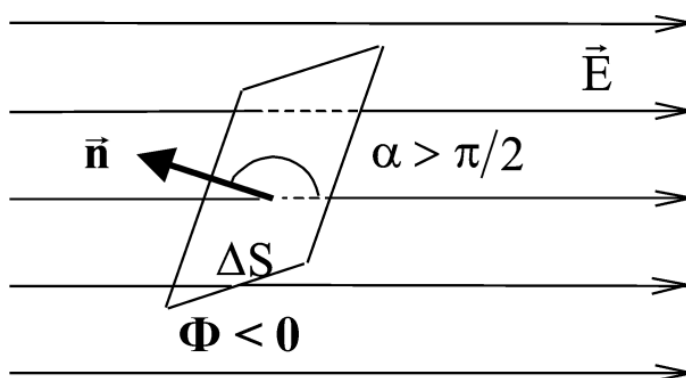


Рисунок 1.6б – Ориентация единичной нормали к элементарной площадке

где  $n$  – вектор единичной нормали к поверхности  $\Delta S$ .

Поток вектора  $E$  через элементарную площадку  $\Delta S$  представляет собой:

$$\Delta\Phi = E \cos\alpha \Delta S, \quad (1.12)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $n$  и  $E$ .

Будем использовать следующие обозначения:  $E_n = E \cos\alpha$  – нормальная проекция вектора  $E$  и  $\Delta S_n = \Delta S \cos\alpha$  – проекция  $\Delta S$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $E$ , то выражение (1.12) для  $\Delta\Phi$  можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\Delta\Phi = E_n\Delta S = E\Delta S_n = E, n \Delta S. \quad (1.13)$$

В случае большой поверхности, когда в её пределах значения и направления  $E$  могут меняться, поверхность необходимо разбить на элементы. Эти элементы можно считать плоскими поверхностями, в пределах которого значение  $E$  не изменяется. Для каждого такого элемента поток вектора напряжённости можно найти с помощью выражения (1.12). Чтобы найти поток через всю поверхность, необходимо произвести суммирование потоков через отдельные элементы:

$$\Phi \approx \sum_{i=1}^N \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^N E_i n_i \Delta S_i. \quad (1.14)$$

При увеличении числа элементов  $N$  до бесконечности и уменьшении их площади выражение для потока вектора напряжённости электростатического поля переходит в интеграл:

$$\Phi = \int_S E_n dS. \quad (1.15)$$

Примеры решения задач.

**Задача 1.** В вакууме находится бесконечно равномерно заряженная плоскость с поверхностной плотностью  $\sigma = 1 \text{ мкКл/м}^2$ , создающая электростатическое поле, в котором на некотором удалении от плоскости расположена круглая площадка радиусом  $r = 10 \text{ см}$ . Найдите поток вектора напряжённости электростатического поля через эту площадку, если угол  $\beta$  между плоскостью площадки и линиями напряжённости равен  $30^\circ$ .

Дано:

$$\sigma = 1 \text{ мкКл/м}^2$$

$$r = 10 \text{ см}$$

Решение:

Напряжённость поля бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$\beta = 30^\circ$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (1)$$

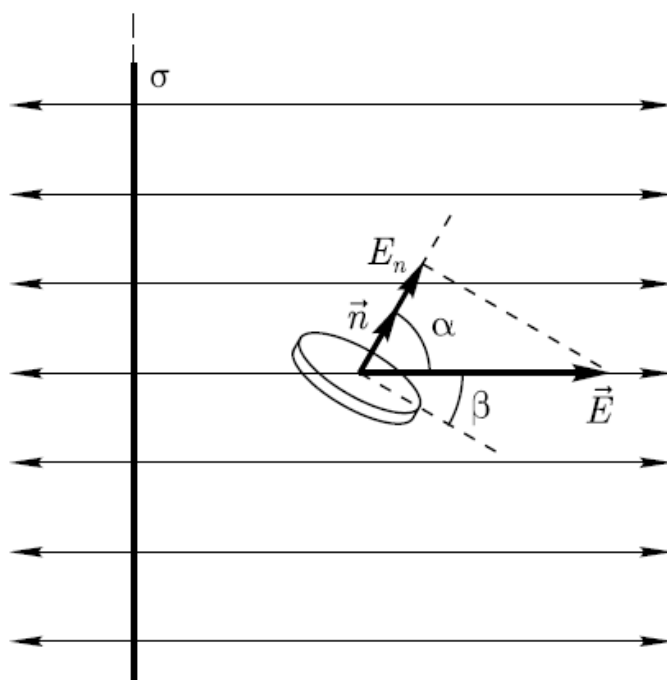
Найти:

$\Phi_E$  – ?

где  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная.

Поток вектора напряжённости электростатического поля:

$$\Phi_E = \int_S E_n dS, \quad (2)$$



где  $E_n = E \cos \alpha$  – проекция вектора  $E$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ . Обозначение интеграла в выражении (2) используется в случаях, когда интегрирование должно выполняться по всей поверхности участка, через который проходят силовые линии.

Таким образом, поток вектора напряжённости через площадку определяется как:

$$\Phi_E = E S \cos \alpha. \quad (3)$$

Согласно рисунку к задаче:

$$\cos\alpha = \cos 90^\circ - \beta = \sin\beta.$$

Следовательно, (3) можно представить как:

$$\Phi_E = ES\sin\beta. \quad (4)$$

Выполним подстановку выражения (4) в выражение (1), учитывая при этом что  $S = \pi r^2$ , получаем:

$$\Phi_E = \frac{\sigma\pi r^2}{2\varepsilon_0} \sin\beta$$

$$\Phi_E = 887\text{В}\cdot\text{м}.$$

**Задача 2.** Две бесконечные заряженные параллельные пластины с поверхностными плотностями заряда  $\sigma_1 = 2 \text{ нКл/м}^2$  и  $\sigma_2 = -5 \text{ нКл/м}^2$  создают электростатическое поле. Определить напряжённость  $E$  поля: 1) между пластинами; 2) вне пластин.

Дано:

$$\sigma_1 = 2 \text{ нКл/м}^2$$

$$\sigma_2 = -5 \text{ нКл/м}^2$$

Найти:

Напряжённость поля

$E$ :

1) между пластинами

2) вне пластин

Решение:

Согласно принципу суперпозиции электростатических полей, напряжённость результирующего поля  $E_p$  созданного двумя заряженными плоскостями определяется выражением:

$$E_p = E_1 + E_2$$

В пространстве слева и справа от плоскостей векторы напряжённостей полей направлены навстречу друг другу (так

как поверхностные плотности заряда имеют разные знаки):

$$E_{P(\text{СЛЕВА})} = E_2 - E_1,$$

$$E_{P(\text{СПРАВА})} = E_1 - E_2,$$

а между плоскостями линии напряженности сонаправлены, следовательно,

$$E_P = E_1 + E_2.$$

Напряжённости электростатических полей, создаваемых первой и второй плоскостями можно найти следующим образом:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая записанные формулы, получаем результирующую напряжённость полей:

$$E_{P(\text{СЛЕВА})} = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0},$$

$$E_{P(\text{СПРАВА})} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Подставив числовые данные, получаем:  $E_{P(\text{СЛЕВА})} = 170 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ ,

$$E_{P(\text{СПРАВА})} = -170 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Здесь знак минус означает, что вектор напряженности  $E$



имеет направление, противоположное положительному направлению оси  $X$ .

$$E_{P(\text{МЕЖДУ})} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$E_{P(\text{МЕЖДУ})} = 395 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

**Задача 3.** Электрический заряд равномерно распределён по сплошной металлической сфере радиусом  $R = 20$  см. Поверхностная плотность заряда равна  $\sigma = 1$  нКл/м<sup>2</sup>. Найти напряжённость электрического поля в точках, которые находятся на расстоянии  $r_1 = 16$  см и  $r_2 = 36$  см от центра сферы.

Дано:

$$R = 20 \text{ см}$$

$$\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$$

$$r_1 = 16 \text{ см}$$

$$r_2 = 36 \text{ см}$$

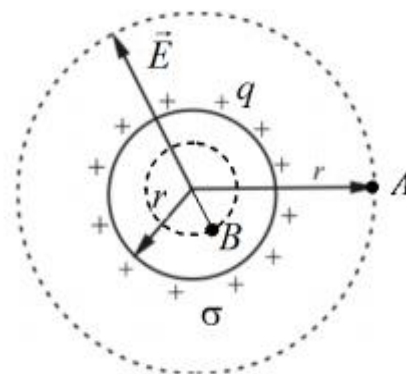
Найти:

$$E(r_1) - ?$$

$$E(r_2) - ?$$

Решение:

Электростатическое поле, которое создается поверхностью сферы, радиусом  $R$ , несущей на себе положительный заряд  $q$  (поверхностная плотность заряда  $\sigma$ ) обладает центральной симметрией. Следовательно, в любой точке направление вектора  $E$  должно проходить через центр сферы, а величина напряженности есть функция расстояния  $r$  от центра сферы.



Вычислим напряжённость сферы в точках  $A$  и  $B$ . Проведем через эти точки сферические поверхности и найдем через них потоки вектора напряжённости электростатического поля.

Из рисунка к задаче следует, что точка  $B$  расположена внутри заряженной сферической поверхности на расстоянии  $r$  от центра ( $r < R$ ). Проведенная через эту точку сферическая поверхность не содержит заряда. Согласно теореме Гаусса напряжённость электростатического поля в точке  $B$  (и подобных ей) должна быть равна  $E = 0$  ( $r < R$ ).

Для нахождения напряжённости поля заряженной сферы поверхностью в точке  $A$ , расположенной на расстоянии  $r_2$  ( $r > R$ ) поместим заряженное тело в центр замкнутой сферической поверхности, радиуса  $r$ , проходящей через точку  $A$ .

Для всех точек, принадлежащих этой поверхности  $E_n = E(r)$ . Внутри поверхности окажется весь заряд  $q$ , создающий рассматриваемое поле. Таким образом,

$$E \cdot r \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Так как  $E dS = \frac{q_i}{\epsilon_0}$ ,

следовательно, напряжённость поля в точках, находящихся на расстоянии  $r_2 > R$ , равна

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}.$$

Если нам известна поверхностная плотность заряда  $\sigma$ , то

$$q = \sigma 4\pi R^2,$$

тогда напряжённость электростатического поля будет равна

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}.$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что поле внутри равномерно заряженной сферы отсутствует, а поле вне заряженной сферической поверхности имеет тот же вид, что и поле точечного заряда  $q$ , если этот заряд расположен на расстоянии  $r$  от точки А. При этом в точке  $r = R$  функция  $E(r)$  терпит разрыв.

Определим значение напряженности электрического поля в точках на расстоянии  $r_1 = 16$  см и  $r_2 = 36$  см от центра сферы:  
 $E(r_1) = 0$ ,  $E(r_2) = 34,87$  В/м.

Задания для самостоятельного решения.

1. По объёму непроводящего шара радиуса  $R$  равномерно распределён заряд с объёмной плотностью заряда  $\rho$ . Определите напряжённость поля в точках находящихся на расстояниях: 1)  $r_1 < R$ ; 2)  $r_2 > R$ .

2. Электрически заряд распределён по пластине толщиной  $d = 2$  см так ,что его объёмная плотность имеет зависимость от координаты  $x$ :  $\rho = \rho_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{d}\right)$  , где  $\rho_0 = 10$  нКл/м<sup>3</sup>, причём заряд распределён так, что измеряется от середины пластины в поперечном направлении. Чему равна напряжённость поля на краю пластины?

3. По поверхности длинного цилиндра радиусом  $R = 2$  см распределён электрический заряд с поверхностной плотностью  $\sigma = 10$  нКл/м<sup>2</sup>. Найти напряжённость электрического поля в точках, расположенных от оси цилиндра на расстоянии: 1)  $r_1 = 1$  см; 2)  $r_2 = 3$  см.

## § 1.8 Теорема Гаусса

Для нахождения потока вектора напряжённости электростатического поля, созданного произвольной системой точечных электрических зарядов, можно

пользоваться законом Кулона и принципом суперпозиции. Но такой метод подходит для решения сравнительно простых задач, хотя и является универсальным. При более сложных распределениях зарядов в пространстве задача становится очень сложной, если решать её таким способом. Получим более общую закономерность, которую можно применять для любого пространственного распределения электрических зарядов.

Для определения потока вектора напряжённости электрического поля для замкнутой поверхности будем рассматривать поверхность как сферу, в центре которой расположен точечный заряд  $q$ . Напряжённость электрического поля точечного заряда определяется выражением (1.6). Очевидно, что направления вектора нормали к сферической поверхности должно совпадать по направлению с радиусом сферы, следовательно, для данной ситуации поток будет равен:

$$\Phi = E_n dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS. \quad (1.16)$$

В данном случае процедура интегрирования производится по *замкнутой поверхности*. Так как расстояние  $r$  от заряда до поверхности постоянно, поток:

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS. \quad (1.17)$$

Поскольку  $dS = 4\pi r^2$  – площадь сферической поверхности, то для потока  $\Phi$  получаем:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.18)$$

Если замкнутая поверхность не содержит электрический заряд, то поток вектора напряжённости поля, созданного этим зарядом, равен нулю, поскольку одни и те же силовые линии пересекают поверхность дважды, сначала, когда силовые линии входят в объём, ограниченный поверхностью, они учитываются со знаком «+», а затем, когда выходят из неё, они учитываются со знаком «-» (рисунок 1.7).

Потоки вектора напряжённости через первый и второй участки равны по модулю, но противоположны по знаку, таким образом, поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность равен нулю. Следовательно,  $\Phi = 0$ , если внутри замкнутой поверхности заряд *отсутствует*.

Результат, полученный для сферической поверхности, может быть легко обобщён для случая, когда поверхность имеет совершенно произвольную форму (а не только сферическую), а также на случай, когда замкнутая поверхность охватывает несколько зарядов.

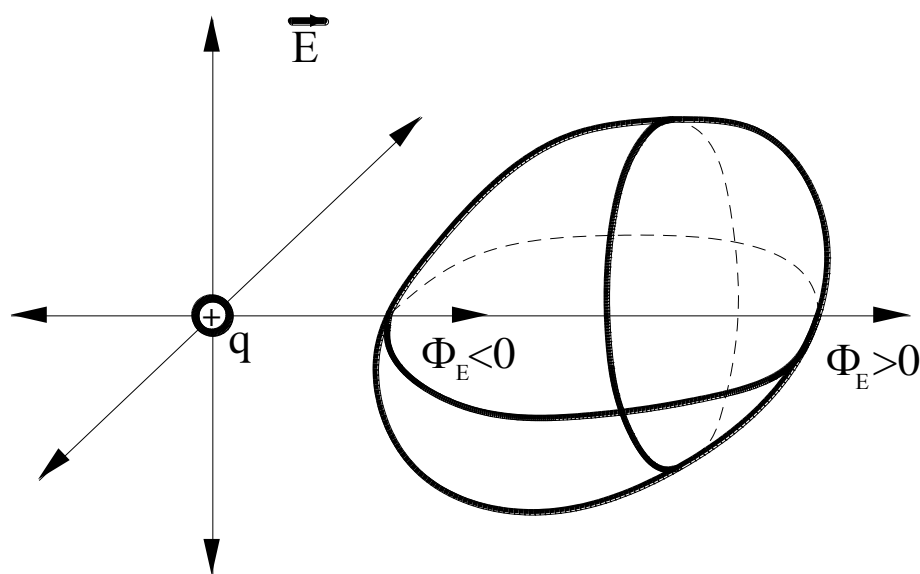


Рисунок 1.7 – К вопросу о потоке вектора  $E$  для замкнутой поверхности, не содержащей электрического заряда

Выводы, изложенные выше, можно объединить и сформулировать в виде теоремы, известной в физике как **теорема Гаусса**: *поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен отношению алгебраической суммы зарядов внутри поверхности и электрической постоянной  $\epsilon_0$ .*

$$\Phi = \int E dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1} q_i. \quad (1.19)$$

Из доказательства теоремы Гаусса можно сделать вывод, что она является следствием закона Кулона, но информация о том, какое направление имеет вектор

напряжённости  $E$ , в теореме Гаусса отсутствует. В связи с этим, перед тем, как применять теорему, необходимо определить направление вектора  $E$ .

В некоторых задачах с помощью теоремы Гаусса рассчитать электростатические поля некоторых систем электрических зарядов можно гораздо проще, нежели с помощью принципа суперпозиции электрических полей. Далее мы рассмотрим несколько таких примеров.

**Задача 1.** Заряд  $q = 2$  нКл помещён на металлическую сферу радиусом 15 см. Чему равна напряжённость электростатического поля  $E$ : 1) на расстоянии  $r_1 = 10$  см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии  $r_2 = 20$  см от центра сферы.

Дано:

$$R = 15 \text{ см}$$

$$q = 2 \text{ нКл}$$

$$r_1 = 10 \text{ см}$$

$$r_2 = 20 \text{ см}$$

Решение:

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме выглядит следующим образом:

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Найти:

$$E_1, E_2, E_3 - ?$$

Рассмотрим случай, когда интересующая нас точка поля находится на расстоянии меньше, чем радиус сферической поверхности ( $r_1 < R$ ):

В этом случае заряд, находящийся на поверхности сферы, а именно там он и находится, так как в условии сказано, что сфера металлическая, а внутри проводника электростатическое поле существовать не может, не охватывается сферой радиусом  $r_1$ , следовательно,  $q = 0$  и  $E_1 = 0$ .

В случае, когда  $r = R$ , то есть радиусы нашей сферы и гауссовой поверхности совпадают, имеем

$$E_2 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

В случае, если радиус гауссовой поверхности больше, чем радиус сферы ( $r_2 > R$ ), получаем величину напряжённости электростатического поля:

$$E_3 4\pi r_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{q}{4\pi r_2^2}.$$

Подставляя числовые значения, получаем  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = 800$  В/м,  $E_3 = 450$  В/м.

**Задача 2.** Построить график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния до оси цилиндров для двух коаксиальных цилиндров радиусами  $R_1$  и  $R_2$  заряженных разноимённо с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

Дано:

$R_1$

$R_2$

$\sigma$

Найти:

Построить график

$E(r)$

Решение:

Выполним рисунок к задаче (вид сверху). Проведем силовые линии напряженности, считая, что внутренний цилиндр заряжен положительно, а наружный – отрицательно.

Воспользуемся теоремой Гаусса и найдем:

- 1) напряжённость поля в точке В, расположенной внутри цилиндров на расстоянии  $r$  от оси цилиндров;
- 2) в точке А, расположенной между цилиндрами на расстоянии  $r$  от оси цилиндров;
- 3) в точке С, расположенной снаружи цилиндров на

расстоянии  $r$  от оси цилиндров.

В качестве гауссовой поверхности удобно выбрать цилиндр с высотой  $h$ .

Для точки В с помощью теоремы Гаусса получаем  $E = 0$ , так как внутри выбранной поверхности суммарный заряд равен нулю.

Для точки А: по теореме Гаусса

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_i.$$

Силовые линии поля проходят только через боковую поверхность цилиндра радиуса  $r$ . Таким образом, поток вектора  $E$  через данную поверхность будет равен

$$E r 2\pi r h.$$

Если  $r > R_1$  внутри поверхности окажется заряд

$$q = \sigma 2\pi R_1 h,$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда на внутреннем цилиндре. Применяя теорему Гаусса, получаем:

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} q_i$$
$$E 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R_1 h}{\epsilon_0},$$

откуда



$$E = \frac{\sigma R_1}{r \varepsilon_0}.$$

Если  $r = R_1$ , тогда

$$E = \frac{\sigma R_1}{r \varepsilon_0} = \frac{\sigma R_1}{R_1 \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом, на поверхности внутреннего цилиндра напряжённость поля скачком меняется от нуля, а внутри цилиндра до

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Если  $r = R_2$ , то напряжённость поля равна

$$E = \frac{\sigma R_1}{r \varepsilon_0} = \frac{\sigma R_1}{R_2 \varepsilon_0}.$$

Для точки С: по тереме Гаусса

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

$$E 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma 2\pi R_2 h}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi (R_1 - R_2) h}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

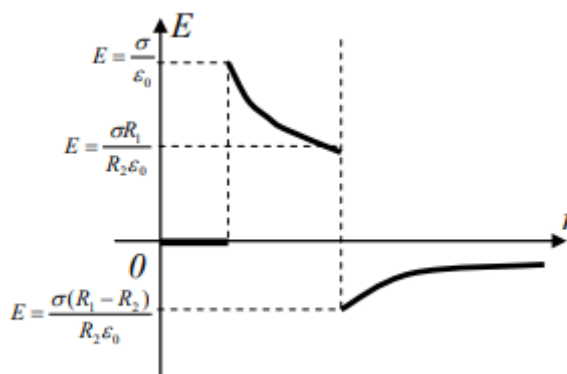
$$E = \frac{\sigma (R_1 - R_2)}{r \varepsilon_0},$$

так как  $R_2 > R_1$ , то напряжённость поля величина

отрицательная. На поверхности наружного цилиндра напряжённость поля равна (при  $r = R_2$ )

$$E = \frac{\sigma R_1 - R_2}{r \varepsilon_0} = \frac{\sigma R_1 - R_2}{R_2 \varepsilon_0} = \frac{\sigma R_1}{R_2 \varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Построим график зависимости напряжённости поля от расстояния до оси цилиндров



**Задача 3.** Вдоль прямой тонкой нити равномерно распределён электрический заряд ( $\tau_1 = 1$  мкКл/м). В одной плоскости с нитью, перпендикулярно к ней расположен тонкий стержень длиной  $l$ . Ближний конец нити Ближайший к нити конец стержня находится на расстоянии  $l$  от неё. Найти силу  $F$ , которая действует на стержень, если его линейная плотность заряда  $\tau_2 = 0,1$  мкКл/м.

Дано:

$$\tau_1 = 1 \text{ мкКл/м}$$

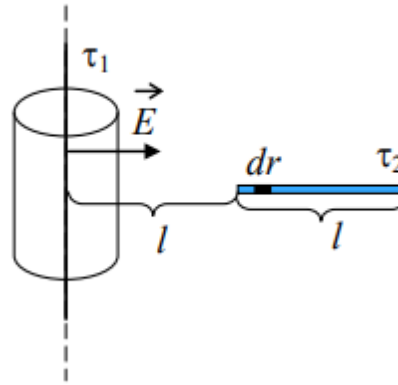
$$\tau_2 = 0,1 \text{ мкКл/м}$$

Решение:

Выбираем бесконечно малый элемент  $dr$ , заряд которого  $dq$ , в этом случае сила взаимодействия малого элемента стержня с нитью можно представить как:

Найти:

$F$ – ?



$$dF = Edq, \quad (1)$$

где  $dq = \tau_2 dr$ ,  $E$  напряжённость поля нити.

Так как рассматриваемая система обладает свойством симметрии, то напряжённость нити в каждой точке по радиальной прямой направлено перпендикулярно нити, и величина напряжённости зависит только от расстояния  $r$  от неё. Находим напряжённость по теореме Гаусса, в качестве гауссовой поверхности выбираем цилиндр с высотой  $h$  и радиусом  $r$ . Найдём поток через эту поверхность. Для оснований цилиндра  $E_n = 0$ , для боковой поверхности  $E_n = E(r)$ . Силовые линии поля проходят только через боковую поверхность цилиндра радиусом  $r$ . В этом случае поток вектора  $E$  через эту замкнутую поверхность можно представить как:

$$\begin{aligned}
 \int_S EdS &= \int_{S_{\text{БОК}}} EdS_{\text{БОК}} \\
 &+ 2 \int_{S_{\text{ОСН}}} EdS_{\text{ОСН}} = E \int_{S_{\text{БОК}}} dS_{\text{БОК}} + 0 = E2\pi rh.
 \end{aligned}$$

Суммарный заряд, внутри выбранной поверхности

$$q_i = \sum_{i=1}^N \tau_1 dr = \tau_1 h.$$

По теореме Гаусса

$$E2\pi rh = \frac{\tau_1 h}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Если напряжённость нити подставить в формулу (1) то получим силу взаимодействия нити и стержня

$$dF = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r} dq = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \tau_2 dr = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r}$$

Произведем интегрирование:

$$F = \int dF = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \int_l^{2l} \frac{dr}{r} = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2l}{l} = \frac{\tau_1 \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln 2$$

Подставив числовые значения получим  $F = 1,25$  мН.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Коаксиальный провод состоит из двух проводников цилиндрической формы: внутреннего радиусом  $R_1 = 15$  мм заряженного с линейной плотностью  $\tau_1 = 0,20$  нКл/м и внешнего радиусом  $R_2 = 3$  мм заряжен с линейной плотностью  $\tau_2 = -0,15$  нКл/м. Между внешним и внутренним проводниками находится диэлектрик – резина с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 3$ . Чему равна напряжённость

электростатического поля в точках, находящихся от оси провода на расстояниях: 1)  $r_1 = 1$  мм; 2)  $r_2 = 2$  мм; 3)  $r_3 = 5$  мм.

2. На шар радиусом  $R = 10$  см поместили электрический заряд, так что его объёмная плотность равна  $\rho = 10$  нКл/м<sup>3</sup>. Вычислите напряжённость электростатического поля: 1) на расстоянии  $r_1 = 5$  см от центра шара; 2) на расстоянии  $r_2 = 15$  см от центра шара.

3. Две бесконечные параллельные плоскости равномерно заряжены зарядами разного знака, так, что поверхностные плотности зарядов  $\sigma_1 = 1$  нКл/м<sup>2</sup> и  $\sigma_2 = 2$  нКл/м<sup>2</sup>. Найдите напряжённость электростатического поля: 1) в пространстве между плоскостями; 2) вне плоскостей. Начертите график изменения напряжённости поля вдоль линии, перпендикулярной плоскостями.

Данный параграф является не обязательным для чтения студентам тех специальностей, для которых физика не является профильной дисциплиной, но студентам физического факультета его прочесть рекомендуется. Рассмотренная в предыдущем параграфе форма теоремы Гаусса называется интегральной. Далее мы рассмотрим ещё одну её форму записи, которую необходимо знать студентам физического факультета, как будущим профессионалам своего дела. Это, так называемая, дифференциальная форма теоремы Гаусса. Применим эту теорему к замкнутой поверхности, ограничивающей бесконечно малый объём, и выполним предельный переход, когда объём стремится к нулю.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат и выберем некоторый элемент объёма в виде прямоугольного параллелепипеда, поверхность которого является замкнутой.

В этом пространстве у нас имеет место не дискретное распределение заряда, а какое-то равномерное с некоторой объёмной плотностью заряда  $\rho(x, y, z)$ . Иными словами, мы рассматриваем непрерывное распределение заряда в пространстве.

Применим теорему Гаусса к этой поверхности, для этого нам понадобится во всех точках замкнутой поверхности установить направление внешней нормали (для замкнутой поверхности выбирается только внешняя нормаль).

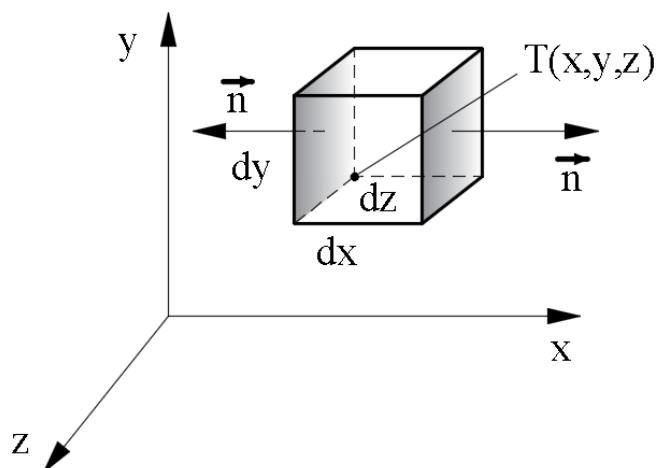


Рисунок 1.7а – К вопросу о нормали к гауссовой поверхности

Выделим две боковые грани параллелепипеда, через которые попытаемся записать поток вектора напряжённости электростатического поля.

Поток вектора напряжённости через левую грань параллелепипеда будет равен:

$$-E_x dydz. \quad (1.20)$$

Поток вектора напряжённости электростатического поля через правую грань параллелепипеда будет равен:

$$E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dydz. \quad (1.21)$$

Теперь нужно просуммировать оба потока, в результате чего мы получим поток вектора напряжённости электростатического поля через левую и правую грани:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} dx dydz, \quad (1.22)$$

где  $dx dy dz = dV$  – элемент объёма.

Точно такими же соотношениями будут связаны вклады в поток за счёт соответствующих пар граней прямоугольного параллелепипеда.

Записав полный поток вектора напряжённости электростатического поля через замкнутую поверхность, мы получим:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (1.23)$$

Выражение вида  $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$  называется дивергенцией вектора напряжённости электростатического поля, обозначается  $divE$ . Следует отметить, что это справедливо в общем случае для любого векторного поля.

Таким образом, теорема Гаусса в дифференциальной форме выглядит так:

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.24)$$

Сам термин «дивергенция» возник не в теории электричества, а в теории течения идеальной жидкости и переводится на русский язык как расходимость. То есть в области пространства, где расположен отрицательный объёмный заряд, силовые линии сходятся и для этих областей  $divE < 0$ , в тех областях, где имеется положительный объёмный заряд,  $divE > 0$ , и силовые линии электростатического поля будут расходиться из этих областей.

## § 1.9 Расчёт электрических полей с помощью теоремы Гаусса

Заряженные тела не всегда можно считать точечными, то есть размерами и формой заряженных тел в некоторых ситуациях пренебрегать нельзя, но при решении некоторых задач очень удобно считать, что заряды распределены в заряженном теле непрерывно: вдоль некоторой линии (например, в случае заряженного тонкого стержня или провода, нити), поверхности (в случае

заряженной плоскости) или объёма. Следовательно, можно ввести понятия линейной, поверхностной и объёмной плотностей заряда.

$$\tau = \frac{dq}{dl} \quad (1.25)$$

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (1.26)$$

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad (1.27)$$

Можно сказать, что линейная плотность заряда – это заряд единицы длины тонкого заряженного цилиндра (провода), поверхностная плотность заряда – заряд единицы площади, объёмная плотность заряда – заряд единицы объёма. Единицы измерения этих величин следующие: Кл/м, Кл/м<sup>2</sup>, Кл/м<sup>3</sup> для линейной, поверхностной и объёмной плотностей соответственно.

В качестве примера рассмотрим расчёт электрического поля бесконечного равномерно заряженного тонкого цилиндра (провода). Пользуясь теоремой Гаусса, найдём выражение для напряженности поля, бесконечного равномерно заряженного цилиндра (провода).

Линейная плотность заряда  $\tau$  определяется согласно формуле (1.25), радиус цилиндра равен  $R$ . В качестве гауссовой поверхности удобно выбрать цилиндр радиусом  $r$  и с образующей длиной  $l$ . Линии напряжённости направлены вдоль радиуса цилиндра во все стороны относительно оси цилиндра. Для простоты на рисунке 1.8 только одна линия напряженности.



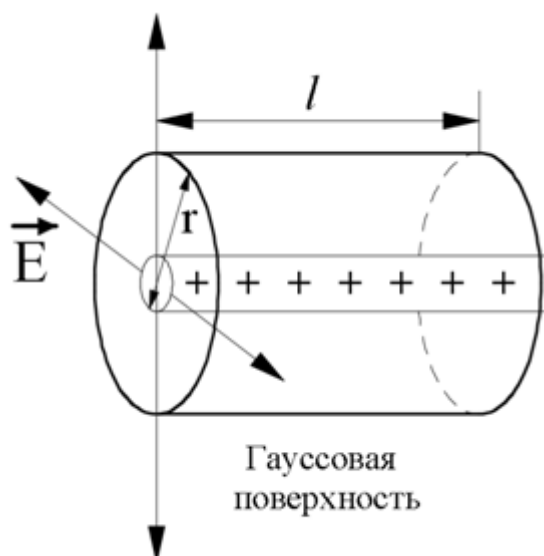


Рисунок 1.8 – К вопросу о вычислении напряжённости поля тонкого равномерно заряженного цилиндра

Торцы гауссовой поверхности параллельны линиям напряженности, поэтому поток вектора  $E$  равен нулю. Поток через боковую поверхность гауссова цилиндра равен  $E2\pi rl$ .

Согласно теореме Гаусса при  $r \geq R$   $2\pi rlE = \frac{1}{\epsilon_0} \tau l$ , откуда

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (1.28)$$

Рассмотрим расчёт напряжённости электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости.

В случае равномерно заряженной плоскости линии напряжённости электрического поля должны быть перпендикулярны плоскости из-за симметрии присущей данной задаче. Выделим на плоскости площадку  $S$  и построим гауссову поверхность, которую в данной ситуации удобно взять в качестве прямоугольного параллелепипеда (ранее был сделан вывод: форма

гауссовой поверхности для решения задачи значения не имеет, и вместо прямоугольного параллелепипеда может быть взят, например, цилиндр).

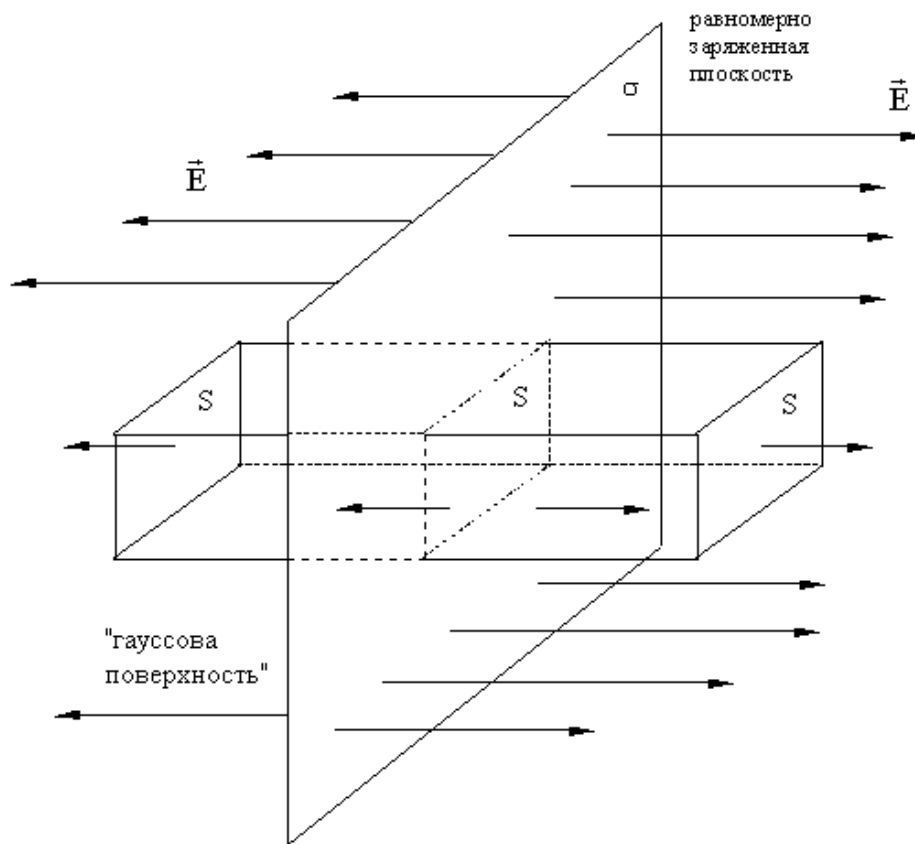


Рисунок 1.9 – К вопросу о вычислении напряжённости поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

В рассмотренном примере линии напряжённости электростатического поля могут быть расположены перпендикулярно плоскости только по обе стороны от последней. Следовательно, поток вектора  $E$  через боковые грани параллелепипеда будет равен нулю, а полный поток через параллелепипед будет равен сумме потоков через его основания  $2ES$ . Заряд находящийся внутри прямоугольного параллелепипеда, равен  $\sigma S$ . По теореме Гаусса  $2ES = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S$ , откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.29)$$

Получим выражения для расчёта напряжённости электростатического поля двух бесконечных, параллельных, разноименно заряженных плоскостей, при условии, что поверхностные плотности зарядов на них равны по величине и их электрические заряды противоположны по знаку.

Поле такой системы плоскостей, в соответствии с принципом суперпозиции, представляет собой сумму векторов  $E = E_1 + E_2$  (рисунок 1.10).

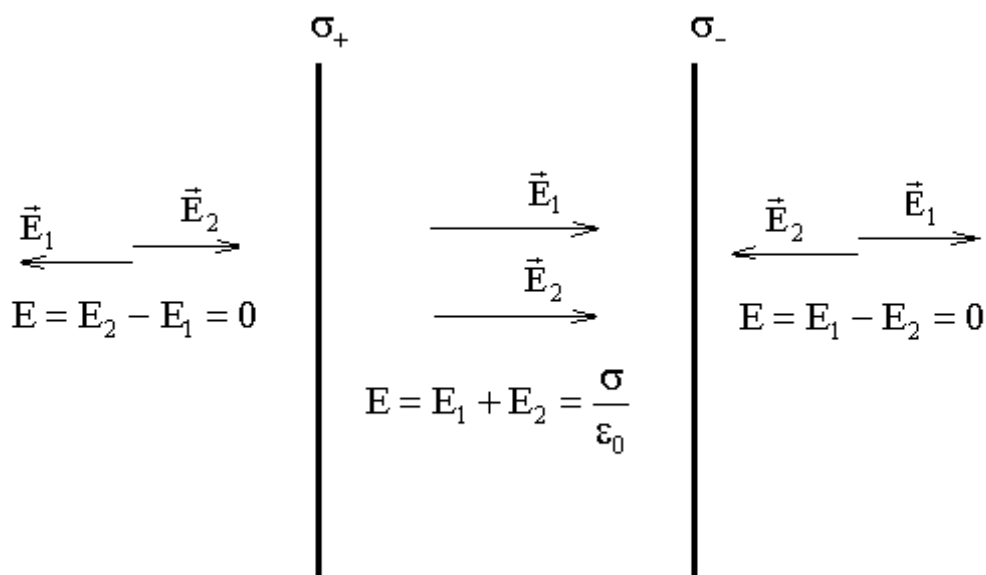


Рисунок 1.10 – К вопросу о вычислении напряжённости поля двух бесконечных, разноименно заряженных плоскостей, параллельных друг другу

Из рисунка 1.10 видно, что в пространстве вне плоскостей векторы напряжённости  $E_1$  и  $E_2$  равны по величине и противоположны по направлению, поэтому компенсируют друг друга, а в пространстве между плоскостями суммарная напряжённость равна  $E = 2E_1 = 2E_2$ . Следовательно, для пространства между плоскостями можно записать:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{1.30}$$

Далее нами будет рассмотрено электротехническое устройство, которое носит название "плоский конденсатор". Обычно он представляет собой две разноименно заряженные пластины, называемые обкладками. Полученная нами формула (1.30) есть выражение для напряженности электрического поля плоского конденсатора.

Получим выражения для напряжённости поля заряженной сферической поверхности. Для этого можно также воспользоваться теоремой Гаусса. Будем считать, что электрический заряд равномерно распределен по сферической поверхности, и, следовательно, можно ввести величину поверхностной плотности заряда  $\sigma$ . Так как сфера обладает свойством симметрии, вектор  $E$  должен быть направлен по перпендикулярной поверхности сферы, то есть направлен по радиусу и одинаковый по всем направлениям. Построим гауссову поверхность таким образом, чтобы она проходила через точку, в которой требуется определить напряжённость электрического поля. Гауссова поверхность будет в данном случае представлять собой сферу, в центр которой совпадает с центром заряженной сферы (рисунок 1.11).

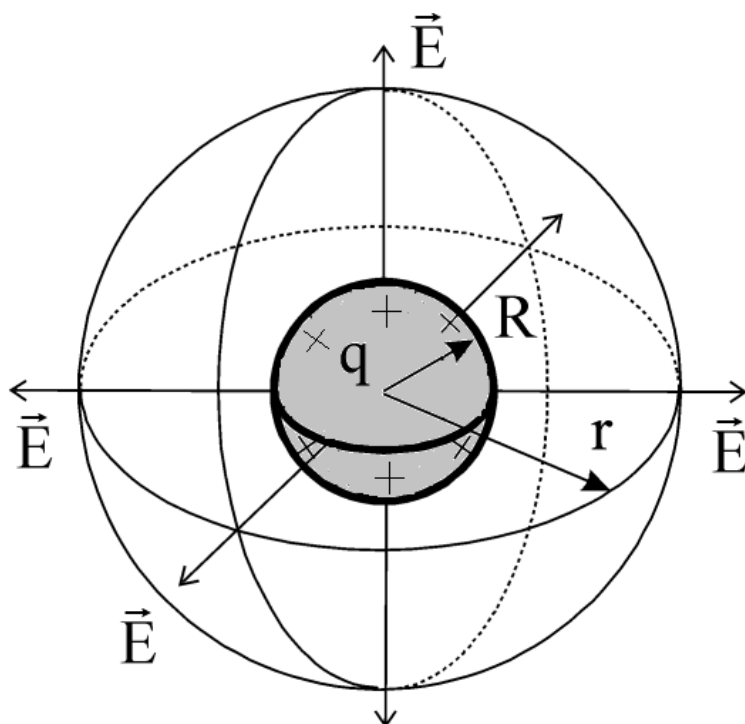


Рисунок 1.11 – К вопросу о вычислении напряжённости поля равномерно заряженной сферической поверхности

Для точек, находящихся на сферической поверхности или вне её (для них выполняется условие  $r \geq R$ ), заряд, который находится на заряженной сфере, находится внутри выбранной нами гауссовой сферы. Следовательно,  $q_i = q$ .

Поток  $\Phi$  найти таким образом очень легко, так как на гауссовой сфере  $E_n$  является постоянной величиной, тогда:

$$\Phi = E_n dS = E_n \int dS = E_n 4\pi r^2. \quad (1.31)$$

Поток вектора напряжённости  $E$  из формулы теоремы Гаусса (1.8.4) подставим в выражение (1.31) и получим:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.32)$$

Следовательно, для электростатического поля сферической поверхности мы получили выражение аналогичное выражению напряжённости поля точечного заряда, который находится в центре сферы и величина которого равна суммарному заряду сферы. Поле внутри сферы отсутствует.

Получим выражение для напряжённости поля равномерно заряженного шара. В данном случае поле рассчитывается аналогичным образом. Вне шара или на его поверхности напряжённость электрического поля такая же, как и у сферы (и, следовательно, у точечного заряда):

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \text{ при } r \geq R, \quad (1.33)$$

где  $q = \int_V \rho dV$  – полный заряд шара.

Формулу (1.33) можно получить аналогично выражению для случая заряженной сферы, поэтому предлагается сделать студентам его самостоятельно.

Внутри шара поле отличается от поля внутри сферической поверхности. В том случае, когда  $r < R$ , то внутри гауссовой сферы окажется не весь заряд шара, а только его часть (рисунок 1.12):

$$q' = \int_V \rho dV = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho. \quad (1.34)$$

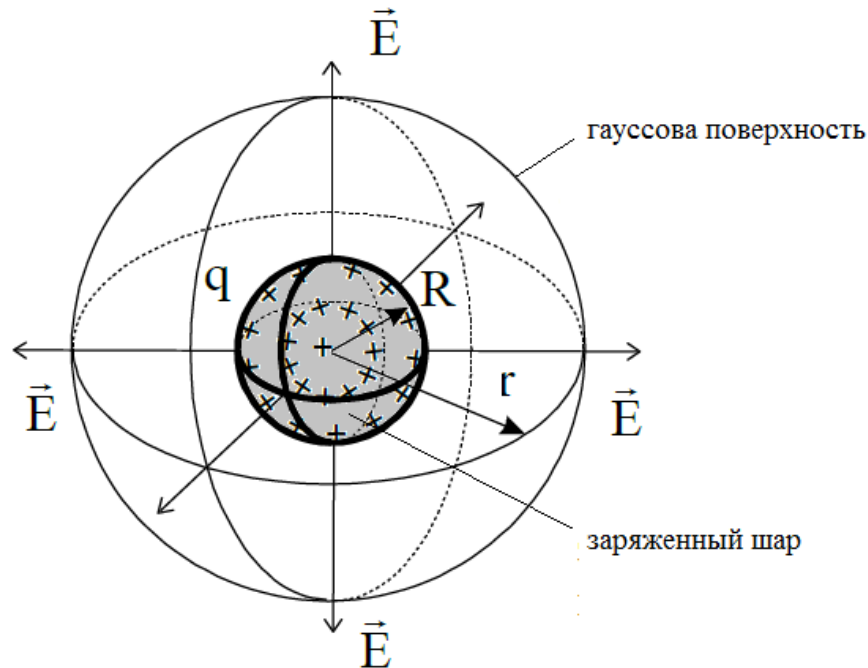


Рисунок 1.12 – К вопросу о вычислении напряжённости поля равномерно заряженного шара

Применяя теорему Гаусса (1.31), получим при  $r < R$

$$E r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{R^3}. \quad (1.35)$$

Выразим объёмную плотность заряда через полный заряд шара  $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ .

В итоге, для полу внутри шара получаем:

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (1.36)$$

## § 1.10 Работа сил электростатического поля в случае двух точечных зарядов. Потенциальная энергия

При перемещении заряда в электрическом поле, действующая на него сила совершает работу. Из курса механики известно, что работа силы при перемещении тела на расстояние  $ds$  определяется выражением  $dA = FdScos\alpha$ .

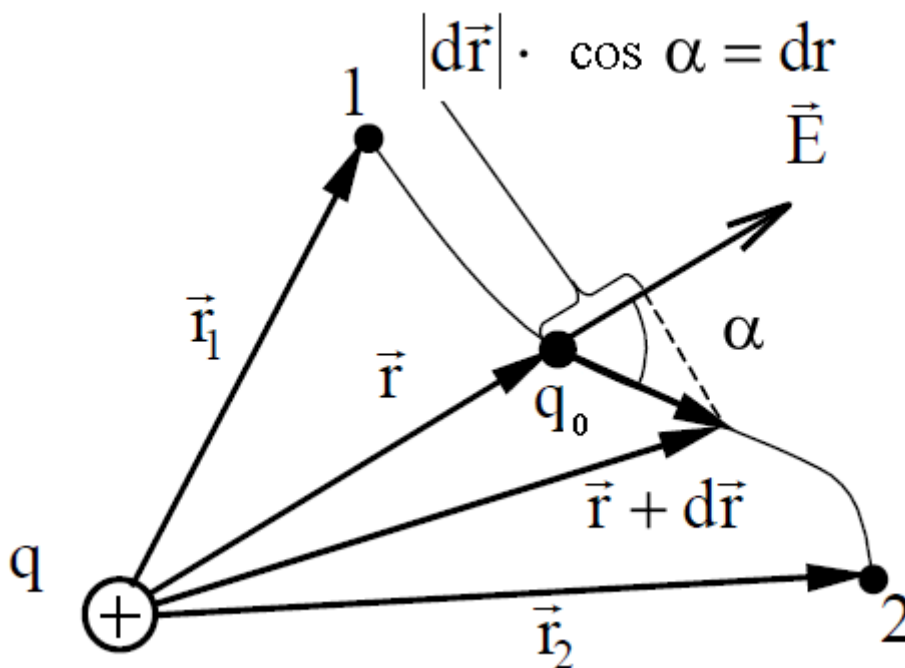


Рисунок 1.13 – К вопросу о вычислении работы сил электростатического поля

Рассмотрим электростатическое поле, созданное точечным положительным зарядом  $q$ . В этом поле движется точечный положительный заряд  $q_0$ . Со стороны электростатического поля заряда  $q$  на заряд  $q_0$  будет действовать сила вдоль линии, соединяющей эти заряды (то есть вдоль радиус-вектора  $r$ , если считать, что заряд  $q$  находится в начале координат). Введём вектор бесконечно малого перемещения  $ds$  для заряда  $q_0$ . В нашем случае он будет сонаправлен с вектором бесконечно малого приращения радиус-вектора  $dr$  заряда  $q$ . Следовательно,  $ds$  – модуль бесконечно малого перемещения должен быть равен модулю вектора  $dr$ , то есть  $ds = dr$ . Из рисунка 1.13 понятно, что  $dr \cos \alpha = ds$ , где  $dr$  – есть бесконечно малое приращение длины вектора  $dr$ .

Таким образом, можно утверждать, что  $d\cos\alpha = dr$ . Подставив в выражение для работы значение модуля силы Кулона (1.1) и  $d\cos\alpha = dr$  получим:  $dA = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$ . Работа сил электростатического поля на всем пути, от точки 1 до точки 2, равна определенному интегралу от  $dA$  в пределах от  $r_1$  и  $r_2$ :

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \quad (1.37)$$

Анализируя полученное выражение (1.37), можно сделать вывод, что работа зависит только от начального и конечного положения заряда и не зависит от формы траектории, то есть электростатические силы являются консервативными силами (как и гравитационные), и совершаемая ими работа представляет собой разность потенциальных энергий в точках 1 и 2:

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2}. \quad (1.38)$$

Учитывая выражение (1.37), можно сделать вывод о том, что  $W_{\Pi} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + C$  – потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, где  $C$  – постоянная интегрирования. Поскольку выбор нулевого уровня для отсчёта потенциальной энергии произволен, а работа электростатических сил выражается как разность потенциальных энергий (1.38), то постоянная интегрирования исчезает при вычислении работы, следовательно, её также можно выбирать произвольно. Удобно выбирать постоянную  $C = 0$ , потому что в этом случае при увеличении  $r$  потенциальная энергия стремится к бесконечности. То есть, такой выбор постоянной интегрирования приводит к следующей формуле для потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов:

$$W_{\Pi} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}. \quad (1.39)$$



Для одинаковых по знаку зарядов (электростатическое отталкивание) потенциальная энергия их взаимодействия положительна, для разных по знаку зарядов (электростатическое притяжение) потенциальная энергия их взаимодействия отрицательна.

С понятием потенциальной энергии связано также понятие потенциала электростатического поля точечного заряда, который представляет собой отношение потенциальной энергии  $W_{\text{п}}$  пробного заряда  $q_0$  в электростатическом поле к его величине:

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q_0}. \quad (1.40)$$

Единицей потенциала в системе СИ служит вольт (В):  $1\text{В} = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}}$ .

Из формул (1.39) и (1.40) видно, что потенциал  $\varphi$  не зависит от величины пробного заряда  $q_0$ . Также из этого же выражения следует, что потенциал электрического поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.41)$$

Анализируя выражения (1.38) – (1.41), можно заметить, что работа электростатического поля по перемещению электрического заряда между точками 1 и 2 может быть представлена следующим образом:

$$A_{12} = q \varphi_1 - \varphi_2, \quad (1.42)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  потенциалы поля в точках, между которыми переместился заряд.

В том случае, когда поле создано системой из  $N$  точечных зарядов, работу, которую совершает это поле при перемещении пробного заряда из точки 1 в точку 2, можно найти при помощи принципа суперпозиции электрических полей (1.10), что

отличает данную ситуацию от той, где источником поля был всего один электрический заряд. Следовательно, мы можем представить работу сил электростатического поля при таком перемещении пробного заряда между точками 1 и 2 как  $A_{12} = \int_1^2 F ds = \int_1^2 \sum_{i=1}^N F_i ds = \sum_{i=1}^N \int_1^2 F ds_i = \sum_{i=1}^N A_{12i}$ , где  $A_{12i}$  – работа, совершаемая над зарядом  $q_0$  полем одного заряда  $q_i$ . Её можно найти с помощью выражения:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_{1i}} - \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_{2i}}. \quad (1.43)$$

Из (1.42) и (1.43) следует, что потенциальная энергия  $W_{\text{п}}$  заряда  $q_i$  в поле системы  $N$  точечных зарядов:

$$W_{\text{п}} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_0}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (1.44)$$

где  $r_i$  – расстояние между зарядом с номером  $i$  и пробным зарядом  $q_0$ .

Исходя из определения потенциала с учётом выражения (1.44), получаем формулу потенциала электростатического поля, созданного системой из  $N$  точечных зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (1.45)$$

В выражении (1.45) под знаком суммирования стоят потенциалы  $\varphi_i$ , созданные каждым из зарядов по отдельности, следовательно, это же выражение можно записать в виде:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i. \quad (1.46)$$

Выражение (1.46) представляет собой принцип суперпозиции для потенциала электростатического поля: потенциал поля системы зарядов равен **алгебраической** сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов независимо друг от друга.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Вдоль бесконечной нити равномерно распределён электрический заряд с линейной плотностью  $\tau = 1 \text{ нКл/см}$ . К этой нити с расстояния  $r_1 = 1,5 \text{ см}$  до  $r_2 = 1 \text{ см}$  вдоль прямой линии приближается электрон. Какую скорость он приобретёт?

Дано:

$$\tau = 1 \text{ нКл/см}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

$$m = 9,110^{-31} \text{ кг}$$

$$r_1 = 1,5 \text{ см}$$

$$r_2 = 1 \text{ см}$$

Решение:

Поскольку по закону сохранения энергии электрон ускоряется под действием электростатического поля (он движется против силовой линии, так как имеет отрицательный заряд), то:

$$E_K = \frac{mv^2}{2}.$$

Найти:

$v - ?$

Скорость движения электрона

$$v = \sqrt{\frac{2E_K}{m}}.$$

Поскольку поле создано заряженной нитью, то его напряжённость определяется как:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Со стороны электростатического поля нити на электрон действует сила:

$$F = -eE = \frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Элементарная работа сил электростатического поля по перемещению электрона равна:

$$dA = Fdr.$$

Чтобы найти работу сил поля, нужно

$$A = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = -\frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Тогда скорость электрона определяется выражением:

$$v = \sqrt{\frac{e\tau}{\pi\epsilon_0 m} \ln \frac{r_1}{r_2}}.$$

Подставив числовые значения получаем  $v = 16$  Мм/с.

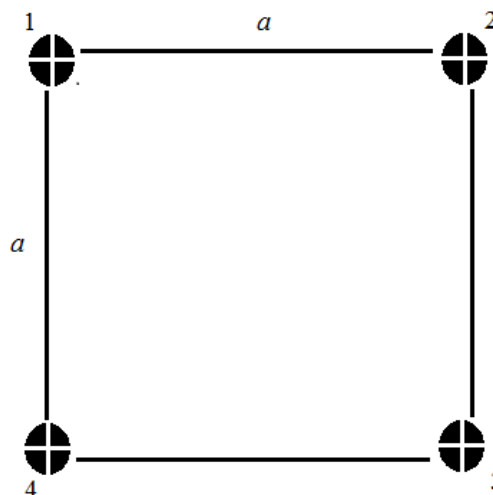
**Задача 2.** В вершинах квадрата со стороной  $a = 10$  см расположены одинаковые положительные заряды  $q = 100$  нКл. Вычислите потенциальную энергию этой системы.

Дано:

$$q = 100 \text{ нКл}$$

$$a = 10 \text{ см}$$

Решение:



Найти:

$W - ?$

Так как данная система обладает свойством симметрии, то можно рассмотреть взаимодействие какого-нибудь одного заряда этой системы со всеми остальными. Пронумеруем заряды (для того, чтоб просто отличать их друг от друга) и рассмотрим взаимодействие между ними:

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}.$$

Так как заряды 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4 находятся на одном расстоянии друг от друга, то потенциальная энергия их взаимодействия будет одна и та же:

$$W_{14} = W_{23} = W_{34} = W_{12}.$$

И потенциальная энергия зарядов 1 и 3 и 2 и 4 тоже одинакова, так они также находятся на одинаковом расстоянии друг от друга:

$$W_{24} = W_{13}.$$

Потенциальные энергии зарядов можно записать так:

$$W_{12} = k \frac{q^2}{a}$$

$$W_{13} = k \frac{q^2}{2a}$$

В итоге получаем:

$$W = k \frac{4q^2}{a} + k \frac{2q^2}{2a} = k \frac{q^2}{a} \left( 4 + \frac{1}{2} \right)$$

Подставив числовые данные имеем:

$$W = 4,87 \text{ мДж.}$$

**Задача 3.** Вдоль кольца из тонкой проволоки радиусом  $r = 5$  см равномерно распределён электрический заряд  $q = 10$  нКл. Найти потенциал  $\varphi$  электростатического поля: 1) в центре кольца; 2) на оси, проходящей через центр кольца, в точке расположенной на расстоянии  $a = 10$  см от центра кольца.

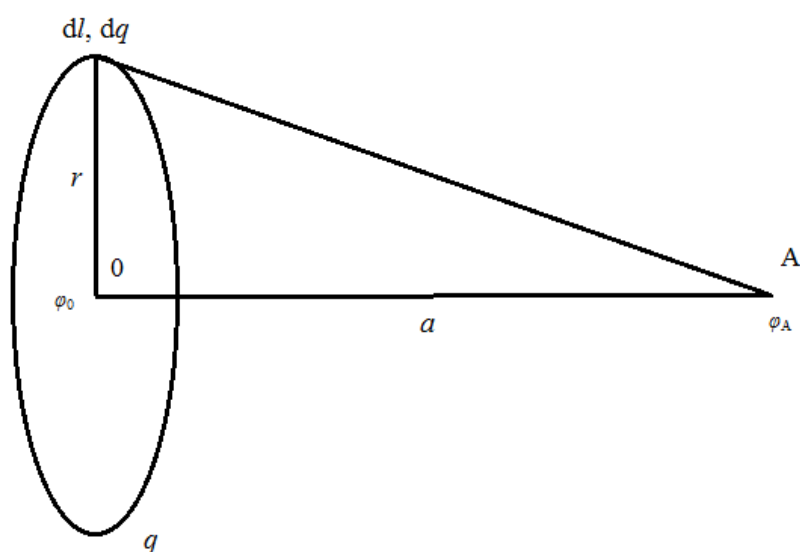
Дано:

$$r = 5 \text{ см}$$

$$a = 10 \text{ см}$$

$$q = 10 \text{ нКл}$$

Решение:



Найти:

$$\varphi_A - ?$$

$$\varphi_0 - ?$$

Разобьём кольцо на большое число бесконечно малых участков, каждый из которых можно считать точечным зарядом. Каждый из них будет создавать в точке А поле аналогичное полю точечного заряда. Потенциал поля одного такого бесконечно малого элемента кольца в точке А можно выразить как:

$$d\varphi = k \frac{dq}{r}.$$

Потенциал поля в центре кольца можно вычислить следующим образом:

$$\varphi_0 = \int_0^q k \frac{dq}{r} = k \frac{q}{r}.$$

Потенциал поля в точке А находим так:

$$\varphi_A = \int_0^q k \frac{dq}{a^2 + r^2} = k \frac{q}{a^2 + r^2}.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\varphi_0 = 805 \text{ В}, \varphi_A = 1800 \text{ В}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. В модели атома водорода Н. Бора электрон движется по круговой орбите, имеющей радиус  $r = 52,8$  пм, вокруг ядра, которым является протон. Найдите: 1) скорость электрона на  $n$ -й орбите; 2) потенциальную энергию электрона в поле ядра (в электрон-вольтах).

2. Бесконечная пластина заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma = 10 \text{ нКл/м}^2$ . Какую работу надо совершить, чтобы приблизить электрон к пластине с расстояния  $r_1 = 2 \text{ см}$  до  $r_2 = 1 \text{ см}$  вдоль линии напряжённости.

3. На кольце с внутренним радиусом  $80 \text{ см}$  и внешним  $1 \text{ м}$  равномерно распределен заряд  $10 \text{ нКл}$ . Определите потенциал в центре кольца.

### § 1.11 Циркуляция вектора напряжённости электрического поля

Выражение (1.42) позволяет сделать следующий вывод: если заряд в электрическом поле движется по замкнутой траектории, работа, совершаемая силами электростатического поля, равна нулю. Таким образом, заряд возвращается в начальную точку по замкнутой траектории, т.е. начальная точка 1 и конечная точка 2 совпадают, следовательно, потенциалы этих точек будут равны:  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

Свяжем работу  $A_{12}$  с напряжённостью электростатического поля, для этого в выражение для вычисления работы

$$A_{12} = \int_1^2 F \cos \alpha dl \quad (1.47)$$

необходимо подставить  $F = qE$ . В выражении (1.47) перемещение заряда обозначено через  $dl$ . В результате подстановки получим:

$$A_{12} = \int_1^2 qE \cos \alpha dl = q \int_1^2 E_l dl, \quad (1.48)$$

где  $E_l = E \cos \alpha$  – проекция вектора напряжённости на направление вектора  $dl$ . В случае замкнутой траектории, из (1.48) и (1.42) можно сделать вывод о том, что:

$$E_l dl = 0 \quad (1.49)$$



Такое обозначение интеграла в (1.49) связано с тем, что интегрирование производится по замкнутому контуру. Интеграл вида (1.49) называют циркуляцией вектора  $E$ . У выражения (1.49) существует еще одно название: **теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля**.

Согласно этой теореме циркуляция вектора напряжённости электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Это общее свойство всех потенциальных полей.

### § 1.12 Связь между напряжённостью электростатического поля и потенциалом

Напряжённость и потенциал – это характеристики одного и того же объекта – электростатического поля. Напряжённость служит его силовой характеристикой, а потенциал – энергетической. Поставим задачу – найти связь между этими характеристиками, зная, что действие сил электростатического поля  $dA$  можно выразить с помощью напряжённости  $E$  электростатического поля:  $dA = Fdl = qEdl$  и через потенциал:  $dA = q\varphi_1 - \varphi_2 = -qd\varphi$ . Так как левые части этих выражений равны, то приравняем их правые части, сократив на величину заряда  $q$  и расписав скалярное произведение  $E dl$  через компоненты:

$$E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi. \quad (1.50)$$

Считая, что  $dy = dz = 0$ , получаем:

$$E_x = -\frac{d\varphi(x, y, z)}{dx}_{y,z=const} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}. \quad (1.51)$$

В выражении (1.50) производная от потенциала, являющимся функцией от трех переменных  $x, y, z$ , берётся при условии, что аргументы  $y$  и  $z$  функции  $\varphi(x, y, z)$  при взятии производной по аргументу  $x$  остаются постоянными. Такого

типа производные называются частными и обозначаются буквой  $\partial$ . Аналогично получают выражения для компонентов поля  $E_y$  и  $E_z$ :

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \quad (1.52)$$

Следовательно, опираясь на выражения (1.50) и (1.52) для вектора напряжённости  $E$ , получаем:

$$E = -\left( i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right). \quad (1.53)$$

Можно ввести следующее обозначение:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.54)$$

тогда выражение (1.53) можно переписать в виде:

$$E = -\nabla\varphi, \quad (1.55)$$

где  $\nabla$  – оператор Гамильтона или оператор градиента.

Знак  $-$  в формуле (1.55) обозначает, что вектор напряжённости направлен в сторону уменьшения потенциала.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии  $r = 10$  см от заряда потенциал равен  $\varphi = 100$  В.

Дано:

Решение:

$r = 10$  см

Связь напряженности электростатического поля и его

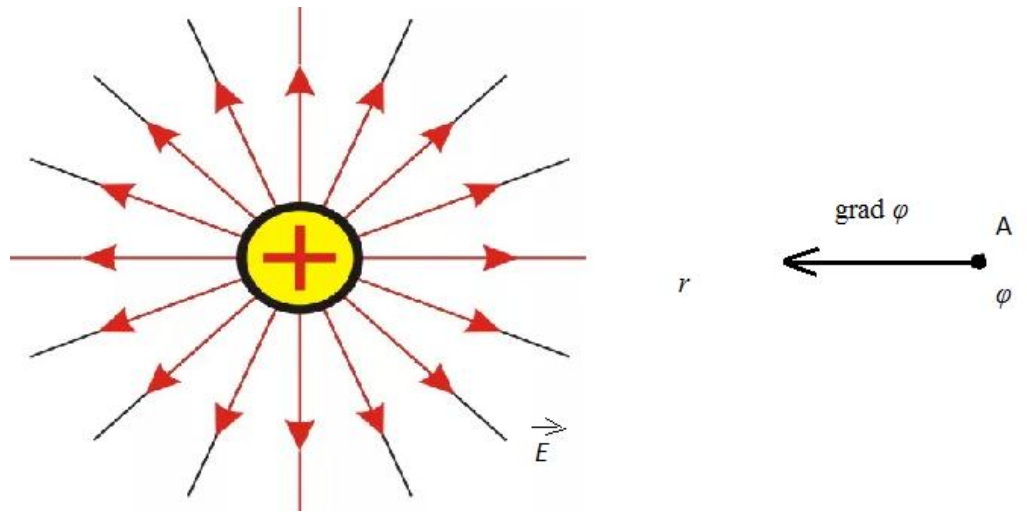
$$\varphi = 100 \text{ В}$$

потенциала:

$$E = -\text{grad}\varphi$$

Найти:

$\text{grad}\varphi - ?$



Силовые линии электростатического поля для положительного заряда изображены на рисунке к задаче.

Модуль вектора градиента электростатического поля:

$$\text{grad } \varphi = E.$$

Потенциал электростатического поля:

$$\varphi = k \frac{q}{r}.$$

Модуль напряжённости электростатического поля:

$$E = k \frac{q}{r^2},$$

откуда получаем:

$$E = \frac{\varphi}{r}.$$

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi}{r}.$$

$\text{grad}\varphi = 1 \text{ кВ/м}$  , направлен к заряду.

**Задача 2.** Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, заряженной равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma = 5 \text{ нКл/м}^2$ . Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля.

Дано:

$$\sigma = 5 \text{ нКл/м}^2$$

Решение:

Связь напряжённости электростатического поля и его потенциала:

Найти:

$\text{grad } \varphi - ?$

$$E = -\text{grad}\varphi.$$

Напряжённость электростатического поля, созданного бесконечной заряженной пластиной:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Следовательно,

$$\text{grad } \varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

$\text{grad}\varphi = 282 \text{ В/м}$ , направлен к плоскости.

**Задача 3.** Определить разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей с поверхностной плотностью заряда  $+\sigma$  и  $-\sigma$ .

Дано:

$x_1$

Решение:

Напряжённость электростатического поля между заряженными

$x_2$

ПЛОСКОСТЯМИ

$+\sigma$

$-\sigma$ .

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

где

Найти:

$$\sigma = \frac{q}{S}$$

$\varphi_1 - \varphi_2 = ?$

поверхностная плотность заряда. Связь напряженности и потенциала:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Тогда

$$d\varphi = -Edx.$$

Чтобы получить выражение для разности потенциалов между любыми двумя точками, находящимися на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  между плоскостями, интегрируем полученное выражение:

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{x_1}^{x_2} dx$$

ИЛИ

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Чему равна линейная плотность заряда бесконечно длинной заряженной нити, если при перемещении заряда  $q = 1$  нКл с расстояния  $r_1 = 5$  см до  $r_2 = 2$  см в направлении, перпендикулярном нити, работа сил поля равна 50 мкДж.

2. Равномерно заряженная прямая нить с линейной плотностью  $\tau = 50$  пКл/см создает электростатическое поле. Чему равны модуль и направление градиента потенциала в точке на расстоянии  $r = 0,5$  м от нити.

3. Протон движется от бесконечной положительно заряженной нити, под действием сил поля вдоль линии напряжённости с расстояния  $r_1 = 1$  см до  $r_2 = 5$  см, при этом его скорость изменилась от 1 до 10 Мм/с. Определите линейную плотность заряда нити.

Для графического изображения распределения потенциала электрического поля пользуются эквипотенциальными поверхностями или поверхностями равного потенциала, то есть потенциалы во всех точках такой поверхности будут иметь равное значение. Тогда уравнение эквипотенциальной поверхности можно представить в следующем виде:  $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ .

Эквипотенциальные поверхности изображаются так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была одинаковой. Следовательно, по плотности (или, как еще говорят, густоте) эквипотенциальных поверхностей можно сделать вывод о величине напряженности электрического поля. Там, где эквипотенциальные поверхности ближе друг к другу (то есть с большей густотой), напряжённость поля выше. Построим эквипотенциальные поверхности для электрического поля положительного точечного заряда.

Так как потенциал поля точечного заряда определяется выражением (1.41):

$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ , то эквипотенциальные поверхности будут представлять собой концентрические сферы. Поскольку линии напряжённости поля положительного точечного заряда являются радиальными прямыми, то в каждой точке линии напряжённости будут перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям (рисунок 1.14).

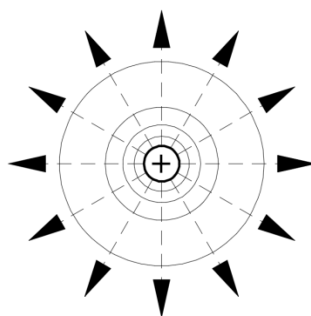


Рисунок 1.14 – Эквипотенциальные поверхности поля точечного положительного заряда (пунктирными линиями изображены линии напряжённости электрического поля)

Студентам предлагается самостоятельно рассмотреть вопрос о том, как изображаются эквипотенциальные поверхности для двух точечных одноименных и разноименных зарядов.

### § 1.13 Проводник в электростатическом поле

Ранее мы рассматривали электростатическое поле в вакууме, теперь перейдем к вопросу об электрическом поле в веществе.

Вещества по их способности проводить электрический ток можно разделить на три класса: проводники, полупроводники и диэлектрики.

**Проводники** – это вещества, в которых имеются свободные электрические заряды. Если в проводнике создать электрическое поле, эти заряды могут свободно двигаться в пределах проводника. Концентрация свободных зарядов в металлических проводниках по порядку величины близка к концентрации атомов.

**Диэлектрики** – это вещества, не имеющие свободных носителей заряда, следовательно, в обычных условиях они практически не проводят электрический ток.

**Полупроводники** – это вещества, занимающие промежуточное место между проводниками и диэлектриками по концентрации свободных зарядов. Концентрация свободных носителей заряда в полупроводнике сильно зависит от его температуры.

В заряженном проводнике свободные заряды начнут двигаться и будут делать это до тех пор, пока напряжённость электрического поля в проводнике не станет равной нулю, так как сила, действующая на заряд равна  $F = qE$ . Если напряжённость поля равна нулю ( $E = 0$ ), то должны быть равны нулю все производные потенциала  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ , это в свою очередь указывает на то, что внутри заряженного проводника потенциал не изменяется, следовательно, поверхность проводника является эквипотенциальной. Если допустить, что поле внутри проводника все же существует, это означало бы нарушение закона сохранения энергии, так как в проводнике происходило бы упорядоченное движение заряженных частиц без затрат энергии от внешнего источника.

Когда проводник помещают в электрическое поле, свободные заряды проводника начинают двигаться под действием силы, действующей на электрические заряды. Это продолжается до тех пор, пока напряжённость электрического поля не упадет до нуля (рисунок 1.15). В результате такого движения на противоположных концах проводника появляются поверхностные заряды противоположного знака. Эти заряды называют индуцированными, а явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике называется **электростатической индукцией**.

Электроны за счёт действия на них силы  $F = -eE$  начинают двигаться против поля (рисунок 15). Перераспределившиеся заряды создают электрическое поле  $E'$ , имеющее противоположное направление по отношению к внешнему электрическому полю  $E_0$ . Когда поле, созданное перераспределившимися зарядами,  $E'$ , станет равным по величине внешнему электрическому полю  $E_0$ , то результирующее поле в проводнике станет равным нулю  $E = E' - E_0 = 0$  и дальнейшее перераспределение зарядов прекратится (рис 1.16).



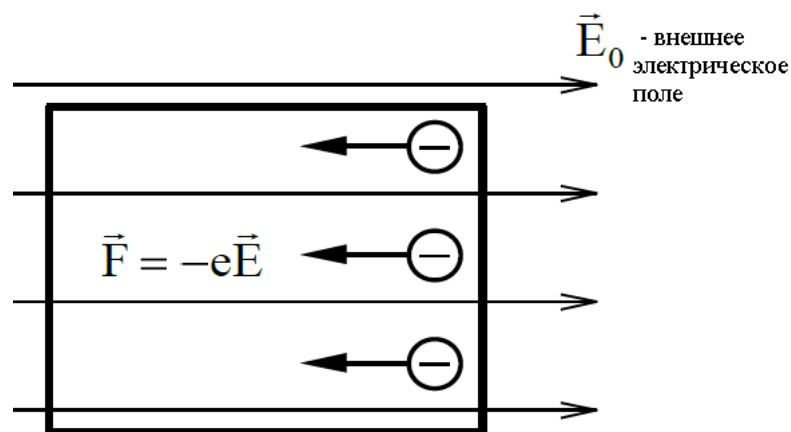


Рисунок 1.15 – Свободные электроны в проводнике движутся под действием силы со стороны внешнего электрического поля

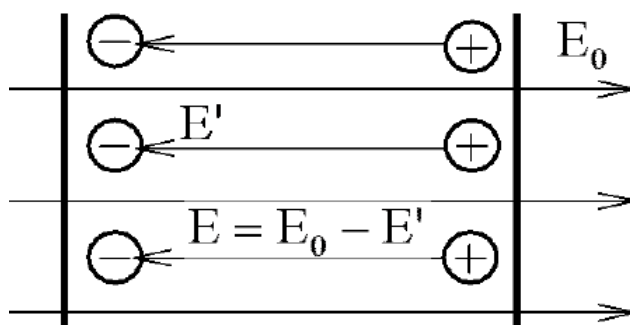


Рисунок 1.16 – Возникновение электростатического поля встречного направления в проводнике за счёт перераспределения электрических зарядов

Поскольку поверхность проводника эквипотенциальна, силовые линии должны быть ей перпендикулярны. Линии напряжения начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах, следовательно, проводник, помещенный в электростатическое поле, разрывает силовые линии. Если проводник имеет внутри полости, то напряжённость электростатического поля внутри них также будет равна нулю. Это явление используется для защиты устройств от электростатического поля, работа которого имеет нежелательный эффект и называется принципом электростатической защиты. Явление было открыто в 1836 году английским физиком Майклом Фарадеем.

## § 1.14 Электрическая ёмкость, конденсаторы

Ранее было показано, что потенциал заряженного проводника оказывается постоянным во всех его точках. Кроме того, экспериментальным путем было установлено, что различные проводники, имеющие один и тот же заряд, при этом имеют разный потенциал. Это указывает на то, что между потенциалом проводника и его зарядом есть некая связь. При рассмотрении потенциала заряженной сферы был сделан вывод о том, что потенциал прямо пропорционален заряду. Впоследствии выяснилось, что это утверждение справедливо для тел любой формы, поэтому можно записать, что:

$$q = C\varphi. \quad (1.56)$$

Величина  $C$ , выступающая в выражении (1.56) в качестве коэффициента пропорциональности между потенциалом и зарядом, носит название электрической ёмкости или просто электроёмкости проводника. В свою очередь:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (1.57)$$

Единицей электрической ёмкости в системе СИ является фарад – это ёмкость тела, потенциал которого при заряде в 1 Кл равен 1 В. 1 Ф – очень большая ёмкость для уединённого проводника. Чтобы металлический шар обладал такой ёмкостью, он должен иметь радиус  $9 \cdot 10^6$  км (что приблизительно равно тринадцати радиусам Солнца). Для сравнения: если как уединённый проводник рассматривать шар, величиной с Землю, его ёмкость составит всего 0,7 мФ.

Как правило, ёмкость уединённых проводников невелика. Но если к такому проводнику приближать другие тела, то на них возникнут индуцированные заряды противоположного знака. Это приведёт к уменьшению потенциала тела и, наоборот, к увеличению ёмкости.

В электротехнике применяются устройства, накапливающие достаточно большие по величине заряды при сравнительно малых потенциалах. Эти устройства называют конденсаторами.

Конденсатор – это система, состоящая из двух проводников (обкладок) с равными по величине и противоположными по знаку зарядами, расположение и форма которых такие, что поле сосредоточено пространстве между ними.

Одной из основных характеристик конденсатора выступает его ёмкость, которая определяется как:

$$C = \frac{q}{U} \quad \text{или} \quad C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (1.58)$$

где  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  – разность потенциалов между обкладками конденсатора;  $q$  – заряд конденсатора.

Самый простой и в то же время наиболее распространённый тип конденсатора – плоский конденсатор, представляющий собой расположенные на небольшом расстоянии друг от друга две разноимённо заряженные пластины (обкладки), между которыми помещён диэлектрик (рисунок 1.17).

В том случае, когда размер обкладок значительно больше расстояния между ними, поле между обкладками можно считать таким же, как в случае двух разноименно заряженных плоскостей. Электрическое поле вне пластин можно считать практически равным нулю, следовательно, конденсатор не оказывает влияние на функционирование других устройств.

Ёмкость плоского конденсатора можно выразить как (эти несложные преобразования студентам предлагается сделать самостоятельно):

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (1.59)$$

Из выражения (1.59) можно сделать вывод, что ёмкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади пластин и обратно пропорциональна расстоянию между ними, кроме того, её величина определяется значением

диэлектрической проницаемости вещества  $\varepsilon$ , находящегося между обкладками конденсатора.

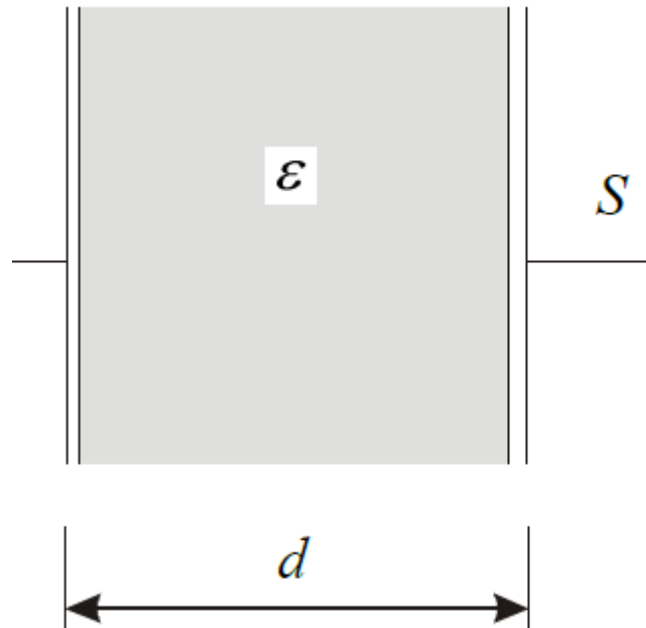


Рисунок 1.17 – Плоский конденсатор

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Между точками А и В создана разность потенциалов  $U = 9$  В. Ёмкости конденсаторов равны соответственно  $C_1 = 3$  мкФ и  $C_2 = 6$  мкФ. Чему равны заряды  $q_1$  и  $q_2$  и разность потенциалов  $U_1$  и  $U_2$  на обкладках конденсатора.

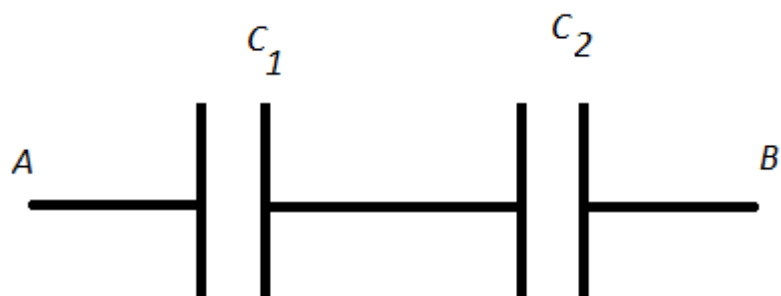
Дано:

$$U = 9 \text{ В}$$

$$C_1 = 3 \text{ мкФ}$$

$$C_2 = 6 \text{ мкФ}$$

Решение:



Найти:

$$q_1, q_2 - ?$$

$$U_1, U_2 - ?$$

Считаем, что конденсаторы соединены последовательно (так как в случае параллельного соединения разности потенциалов на обкладках конденсаторов были бы одинаковые).

Тогда разности потенциалов на их обкладках будут складываться и в сумме давать разность потенциалов между точками А и В, то есть 9 В:

$$U = U_1 + U_2.$$

Заряды же на обкладках конденсаторов будут одинаковые:

$$q_1 = q_2 = q = \text{const.}$$

Ёмкость первого конденсатора будет равна:

$$C_1 = \frac{q}{U_1}.$$

Ёмкость второго конденсатора:

$$C_2 = \frac{q}{U_2}.$$

Так как заряды обкладок конденсаторов и первого и второго равны, то:

$$C_1 U_1 = C_2 U_2.$$

Выразим отсюда ёмкость любого из конденсаторов, например, второго:

$$U_2 = \frac{C_1}{C_2} U_1.$$

Далее:

$$U = U_1 + \frac{C_1}{C_2} U_1.$$

$$U_1 = \frac{UC_2}{C_1 + C_2}.$$

Находим  $U_2 = U - U_1$  и  $q_1 = q_2 = C_1 U_1$ .

Подставив числовые значения, находим:

$$U_1 = 6 \text{ В}, U_2 = 3 \text{ В}, q_1 = q_2 = 18 \text{ мкКл}.$$

**Задача 2.** Плоский воздушный конденсатор имеет площадь пластин  $S = 0,01 \text{ м}^2$ . Расстояние между пластинами составляет 5 мм. К пластинам приложена разность потенциалов  $U_1 = 300 \text{ В}$ . После того, как конденсатор отключили от источника тока, пространство между пластинами начинают заполнять эбонитом. Определите разность потенциалов  $U_2$  между пластинами после заполнения. Найти ёмкость конденсатора  $C_1$  и  $C_2$  (до и после заполнения диэлектриком) и поверхностные плотности заряда  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на пластинах до и после их заполнения.

Дано:

$$d = 5 \text{ мм}$$

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$U_1 = 300 \text{ В}$$

Найти:

$$C_1, C_2 - ?$$

$$\sigma_1, \sigma_2 - ?$$

Решение:

Пространство между пластинами конденсатора заполняется диэлектриком (эбонитом) уже после отключения конденсатора от источника тока, следовательно, по закону сохранения электрического заряда, заряд на пластинах остаётся постоянным:

$$q = \text{const.}$$

Поверхностная плотность заряда на пластинах тоже остается постоянной величиной:

$$\sigma = \frac{q}{S} = \text{const.}$$

Поскольку напряжённость поля на пластинах конденсатора:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{U}{d}.$$

После заполнения:

$$\sigma d = U_1 \varepsilon_0 \varepsilon_1, \quad (1)$$

$$\sigma d = U_2 \varepsilon_0 \varepsilon_2. \quad (2)$$

Левые части выражений (1) и (2) одинаковые, следовательно, можно приравнять правые части:

$$U_1 \varepsilon_1 = U_2 \varepsilon_2,$$

откуда

$$U_2 = \frac{U_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Подставив числовые значения, получаем  $U_2 = 115$  В.

До заполнения конденсатора эбонитом:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} = 17,7 \text{ пФ.}$$

После заполнения

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d} = 46 \text{ пФ.}$$

Поверхностная плотность заряда

$$\sigma = \frac{q}{S} = \frac{C_1 U_1}{S} = 531 \text{ н} \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

**Задача 3.** Абсолютный электрметр представляет собой плоский конденсатор, с неподвижной нижней пластиной, а верхней подвешенной к коромыслу весов. При отсутствии заряда на конденсаторе расстояние между пластинами  $d = 1$  см. Какую разность потенциалов  $U$  необходимо приложить между пластинами, если для сохранения того же расстояния  $d = 1$  см на другую чашку весов был положен груз массой  $m = 5,1$  г? Площадь пластин конденсатора  $S = 50$  см<sup>2</sup>.

Дано:

$$d = 1 \text{ см}$$

$$m = 5,1 \text{ г}$$

Найти:

$$U - ?$$

Решение:

На верхнюю (подвижную) пластину действуют две силы: сила притяжения между пластинами  $F$  и сила натяжения  $T$  нити коромысла весов. Первая направлена вниз, вторая вверх. Кроме того, сила натяжения нити  $T$  численно равна весу  $P$ , где вес

$$P = mg.$$

Условие равновесия сил запишется как:

$$F = T$$

или  $F = mg$ . Силу притяжения между пластинами можно записать как:

$$F = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2d^2},$$

следовательно

$$mg = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2d^2},$$



$$\text{откуда } U = \frac{2d^2mg}{\varepsilon\varepsilon_0S}$$

Находим  $U = 15$  кВ.

Задания для самостоятельного решения.

1. Медный шар радиусом  $R = 0,5$  см помещен в масло. Определить заряд  $q$  шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле. Электрическое поле имеет напряжённость  $E = 3,6$  МВ/м и направлено вертикально вверх. Плотность масла  $\rho_m = 0,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Капелька ртути, имеющая заряд  $q = 2,4 \cdot 10^{-9}$  Кл находится в равновесии в плоском горизонтально расположенном конденсаторе. Напряжённость электростатического поля  $E = 60$  кВ/м. Определить радиус  $R$  капли.

3. Параллельно пластинам плоского горизонтального конденсатора движется электрон со скоростью  $v = 3,6 \cdot 10^7$  м/с. Длина пластин конденсатора составляет 20 см, напряжённость поля внутри конденсатора  $E = 3,7$  кВ/м. Определить смещение электрона в вертикальном направлении за время его движения в конденсаторе.

Сферический конденсатор (рисунок 1.18) – это две концентрические сферы радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , с общим центром, которые разделены слоем диэлектрика.

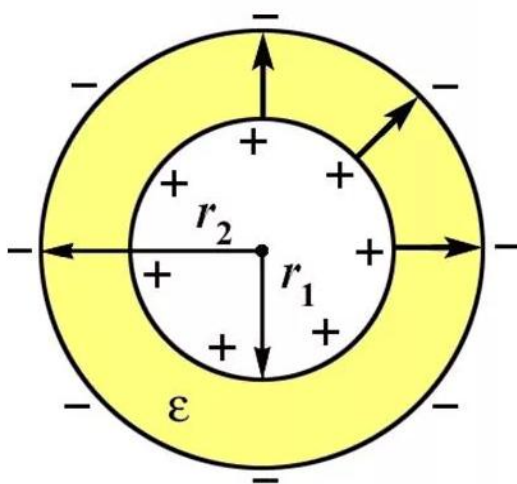


Рисунок 1.18 – Сферический конденсатор

Ёмкость сферического конденсатора может быть представлена как:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (1.60)$$

Цилиндрический конденсатор (рисунок 1.19) представляет собой два коаксиальных цилиндра длиной  $l$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , пространство между которыми заполнено диэлектриком:

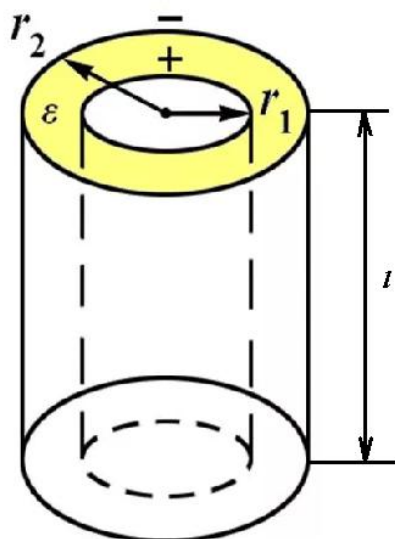


Рисунок 1.19 – Цилиндрический конденсатор

Ёмкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (1.61)$$

Рассмотрим плоский конденсатор, одна из пластин которого закреплена, а вторая может двигаться в горизонтальном направлении. Заряд левой пластины положительный  $+q$ , правой пластины такой же по величине, только отрицательный  $-q$ .

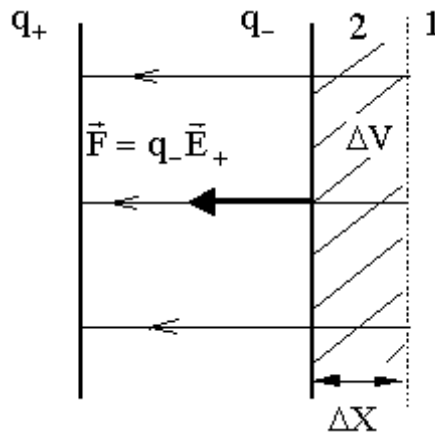


Рисунок 1.20 – Перемещение пластины в электрическом поле конденсатора

Электрическое поле положительно заряженной пластины действует на левую отрицательную пластину с силой  $F = q_- E_+$  ( $E_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0}$ ). При перемещении правой обкладки на расстояние  $\Delta x$  (рисунок 1.20) эта сила совершит работу:  $A_{12} = F \Delta x = q_- E_+ \Delta x = \sigma_- S \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} \Delta x = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} \Delta x = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S \Delta x$ .

Представим поверхностную плотность заряда через напряжённость результирующего поля  $E$  между обкладками конденсатора:  $\sigma = \epsilon_0 E$ . Таким образом, работу  $A_{12}$  можно выразить через напряжённость  $E$  поля конденсатора:  $A_{12} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S \Delta x = \frac{\epsilon_0 E^2}{2\epsilon_0} S \Delta x = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S \Delta x$ . Произведение  $S \Delta x$  представляет собой объём  $\Delta V$ , в котором после перемещения обкладки пропало электростатическое поле. Следовательно,

$$A_{12} = \frac{\epsilon_0 E^2 \Delta V}{2}. \quad (1.62)$$

Из курса механики известно, что в потенциальных полях работа совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии:  $A_{12} = W_{п1} - W_{п2}$ , в данном примере подразумевается потенциальная энергия правой пластины в поле левой.

Можно рассуждать и по-другому: потенциальная энергия запасена в электрическом поле. Если поле из объёма  $\Delta V$  исчезло, то уменьшение потенциальной энергии связано с напряжённостью поля следующим образом:

$$W_{п1} - W_{п2} = \frac{\varepsilon_0 E^2 \Delta V}{2} \quad (1.63)$$

Поскольку поле конденсатора является однородным, то можно считать, что его энергия равномерно распределена по всему объёму поля  $\Delta V$ . Следовательно, можно ввести понятие плотности энергии электрического поля  $w$ :

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}, \quad (1.64)$$

где  $\Delta W$  – энергия электрического поля, приходящаяся на объём  $\Delta V$ . Учитывая выражения (1.63) и (1.64), получаем:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \quad (1.65)$$

При наличии в пространстве, где создано электрическое поле диэлектрика, выражение (1.65) можно записать так:

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (1.66)$$

Умножив выражение (1.66) на объём конденсатора  $V = Sd$  и выразив напряжённость электрического поля как  $E = \frac{U}{d}$ , получим формулу для энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{2} \frac{U^2}{d^2} Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d}. \quad (1.67)$$

С учетом выражения (1.59) для ёмкости плоского конденсатора можно получить энергию заряженного до напряжения  $U$  конденсатора, имеющего ёмкость  $C$  такое выражение:

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (1.68)$$

Это выражение является общим для конденсаторов любой формы, несмотря на то, что нами оно было получено для плоского конденсатора.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Потенциал шара, помещённого в керосин равен  $\varphi = 4.5$  кВ. Поверхностная плотность заряда составляет  $\sigma = 11,3$  мкКл/м<sup>2</sup>. Найти радиус  $R$ , заряд  $q$ , ёмкость  $C$  и энергию  $W$  шара.

Дано:

$$\varphi = 4.5 \text{ кВ}$$

$$\sigma = 11,3 \text{ мкКл/м}^2$$

Решение:

В данной задаче можно считать, что заряд равномерно распределен по поверхности, тогда задана поверхностная плотность заряда  $\sigma$ .

Потенциал шара и его заряд связаны формулой:

Найти:

$$R - ?$$

$$q - ?$$

$$C - ?$$

$$W - ?$$

$$q = C\varphi. \quad (1)$$

При этом заряд

$$q = \sigma S. \quad (2)$$

Ёмкость сферического конденсатора (а шар в данной задаче им и является по сути) равна:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (3)$$

Площадь поверхности сферы равна:

$$S = 4\pi R^2. \quad (4)$$

Подставим выражения (2), (3) и (4) в (1):

$$\sigma R = \varepsilon \varepsilon_0 \varphi,$$

откуда  $R = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \varphi}{\sigma}$ .

Подстановка числовых данных даёт значение  $R = 7$  мм.

Из выражения (2) следует, что заряд

$$q = 4\pi R^2 \sigma.$$

Заряд равен 7 нКл.

Из выражения (1) находим ёмкость сферического конденсатора (шара):

$$C = \frac{q}{\varphi}$$

$$C = 15,5 \text{ пФ.}$$

Энергия заряженного шара будет равна:

$$W = \frac{q^2}{2C}.$$

Энергия равна  $W = 15,8$  мкДж

**Задача 2.** Шар 1 радиусом  $R_1 = 10$  см, заряженный до потенциала  $\varphi_1 = 3$  кВ, отключают от источника напряжения и соединяют проволочкой (ёмкостью которой

можно пренебречь) с удаленным незаряженным шаром 2. Шар 2 имеет радиус  $R_2 = 10$  см. Определить: а) первоначальную энергию  $W_1$  шара 1; б) энергии  $W_1'$  и  $W_2'$  шаров 1 и 2 после соединения и работу  $A$  разряда при соединении.

Дано:

$$R_1 = 10 \text{ см}$$

$$\varphi_1 = 3 \text{ кВ}$$

$$R_2 = 10 \text{ см}$$

Решение:

Так как в условии задачи сказано, что все шары имеют одинаковые радиусы, можно записать:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R.$$

Найти:

Сначала энергия первого шара была равна:

а)  $W_1 - ?$

б)  $W_1', W_2', A - ?$

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C}, \quad (1)$$

При этом заряд

$$q = \sigma S. \quad (2)$$

Из соотношения (2) находим заряд  $q_1$ :

$$q_1 = C\varphi.$$

Подстановка которого в выражение (1) даёт нам значение энергии  $W_1$ :

$$W_1 = \frac{C\varphi_1^2}{2}.$$

Ёмкость шара

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R,$$

тогда

$$W_1 = 2\pi\epsilon\epsilon_0 R\varphi_1^2.$$

$$W_1 = 50 \text{ мкДж.}$$

После того, как шары 1 и 2 соединили проволокой, начнется перетекание заряда с одного шара на другой, которое будет продолжаться до тех пор, пока потенциалы шаров не станут равны друг другу:

$$\varphi_1' = \varphi_2'. \quad (3)$$

Так как данную систему можно считать изолированной (шары кроме друг друга больше ни с чем не взаимодействуют), то можно записать закон сохранения заряда для данной системы:

$$q_1 = q_1' + q_2', \quad (4)$$

где  $q_1'$  и  $q_2'$  – заряды шаров 1 и 2 после их соединения.

Поскольку в условии задачи говорится, что шары 1 и 2 находятся далеко друг от друга, то потенциал каждого шара определяется только его зарядом и влияние поля другого шара можно не учитывать, тогда:

$$\varphi_1' = \frac{kq_1'}{R}$$



(5)

$$\varphi_2' = \frac{kq_2'}{R}.$$

Выражение (5) даёт возможность сделать заключение, что заряды  $q_1'$  и  $q_2'$  равны друг другу.

$$q_1' = q_2'.$$

Так как ёмкость и потенциал шаров 1 и 2 после соединения одинаковы, то одинаковы будут и их энергии:

$$W_1' = W_2' = \frac{C\varphi_1^2}{2}$$

$$W_1' = W_2' = 12,5 \text{ мкДж}.$$

При вычислении энергии шаров после соединения мы учли тот факт, что потенциал каждого из них стал в 2 раза меньше потенциала  $\varphi_1$ .

Работу заряда  $A$  можно найти как разность энергий:

$$A = W_1 - W_1' + W_2' = \frac{W_1}{2}$$

$$A = 25 \text{ мкДж}.$$

**Задача 3.** Плоский воздушный конденсатор имеет площадь  $S = 0,01 \text{ м}^2$ . Расстояние между пластинами  $d = 5 \text{ мм}$ . Какая разность потенциалов  $U$  необходимо было приложить к пластинам конденсатора, если при разряде конденсатора выделилось  $Q = 4,19 \text{ мДж}$  тепла?

Дано:

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$d = 5 \text{ мм}$$

$$Q = 4,19 \text{ мДж}$$

Решение:

Энергия заряженного конденсатора равна:

$$W = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2d}$$

Найти:

$U$  – ?

В процессе разрядки конденсатора эта энергия должна выделиться в виде тепловой

$$Q = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S U^2}{2d},$$

Следовательно

$$U = \sqrt{\frac{2dQ}{\varepsilon \varepsilon_0 S}}$$

Подставив числовые данные, получаем  $U = 21,7 \text{ кВ}$ .

Задания для самостоятельного решения.

1. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе находится заряженная капелька масла. При отсутствии электрического поля капелька падает с постоянной скоростью  $v_1 = 0,11 \text{ мм/с}$ , если же на пластины конденсатора подана разность потенциалов  $U = 150 \text{ В}$ , то капелька падает со скоростью  $v_2 = 0,43 \text{ мм/с}$ . Определить радиус  $r$  капельки и её заряд  $q$ . Расстояние между пластинами равно  $d = 1 \text{ см}$ , динамическая вязкость воздуха  $\eta = 1,82 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$ ; плотность масла больше плотности газа, в котором падает капелька, на  $\Delta\rho = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ .

2. Между двумя вертикальными пластинами, находящимися на расстоянии  $d = 1 \text{ см}$  друг от друга, на нити подвешен заряженный шарик массой  $m = 0,1 \text{ г}$ . После того, как на пластины подали разность потенциалов  $U = 1 \text{ кВ}$  нить с шариком отклонилась на угол  $\alpha = 10^\circ$ . Определите заряд  $q$  шарика.

3. Расстояние между пластинами плоского конденсатора  $d = 1$  см. Одновременно от противоположных пластин конденсатора начинают двигаться протон и  $\alpha$ -частица. Какое расстояние  $l$  пролетает  $\alpha$ -частица за то время, в течение которого протон пройдет весь путь от одной пластины до другой?

### § 1.15 Электрическое поле в диэлектриках

**Диэлектриками** называют вещества, которые в обычном состоянии практически не проводят электрический ток. Это означает, в свою очередь, что в таких веществах нет свободных заряженных частиц. В качестве таких частиц могли бы выступать электроны, но в идеальном диэлектрике все электроны связаны с ядром атома, то есть имеют чёткую территориальную принадлежность (если так можно выразиться), следовательно, свободно перемещаться по телу не могут. Для нарушения этой связи необходимы сильные воздействующие факторы. Заряды в диэлектрике под действием сил внешнего поля могут только незначительно перемещаться в противоположные стороны. Такие заряды получили название **связанных зарядов**.

Хорошим модельным представлением диэлектрика может являться электрический диполь.

**Электрическим диполем** называют систему, состоящую из двух разноименных электрических зарядов одинаковых по величине.

Одной из важных характеристик электрического диполя служит вектор электрического дипольного момента, определяемый как:

$$p_e = qr, \quad (1.69)$$

где  $q$  – модуль одного из зарядов,  $r$  – вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному.

Обратите внимание, что дипольный момент не зависит от положения диполя в пространстве, так как вектор  $r$  остается неизменным при любом выборе опорного

тела. Следовательно, при рассмотрении различных задач начало координат можно выбирать в центре диполя.

Если поместить диполь в однородное электрическое поле, то на его полюсы со стороны электростатического поля начнут действовать силы, равные по величине (поле однородное) и противоположные по направлению, которое создадут вращательный момент, равный:

$$M = Fr \sin \alpha. \quad (1.70)$$

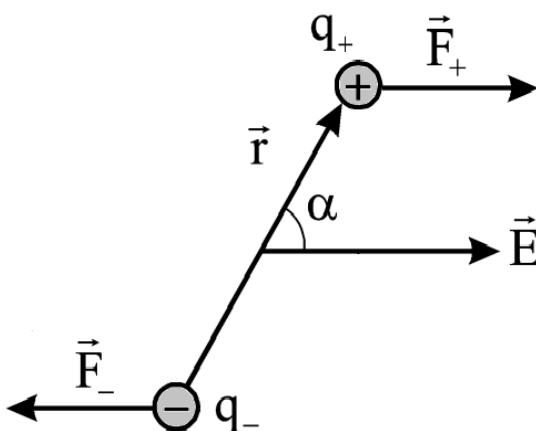


Рисунок 1.21 – Электрический диполь

Учитывая, что  $F = qE$  и определение электрического дипольного момента, можно записать выражение для модуля момента сил в следующем виде:

$$M = p_e E \sin \alpha. \quad (1.71)$$

Как нам известно из определения векторного произведения, направление этого вектора определяется правилом правого винта. Таким образом, момент сил является результатом векторного произведения:

$$M = p_e, E. \quad (1.72)$$

Возникающая пара сил может лишь поворачивать диполь в направлении поля, но не может заставить его двигаться поступательно. При параллельной ориентации векторов  $p_e$  и  $E$  диполь должен находиться в состоянии устойчивого равновесия.

Рассмотрим вопрос о том, каким воздействиям во внешнем электростатическом поле  $E$  подвергается электрический диполь с электрическим моментом  $p_e$ . Мы ограничимся рассмотрением поведения «жёсткого» диполя, то есть диполя, у которого расстояние  $r$  которого не меняется во внешнем поле  $E$ . Ранее уже был рассмотрен вопрос о том, что на диполь действует в электростатическом поле пара сил создающих вращающий момент (1.70) – (1.72). Под действием момента сил  $M$  диполь поворачивается, при этом совершается работа

$$\partial A = M d\alpha = p_e E \sin\alpha d\alpha, \quad (1.73)$$

которая идет на увеличение его потенциальной энергии. Отсюда получаем потенциальную энергию диполя в электрическом поле

$$\partial E_{\Pi} = p_e E \sin\alpha d\alpha, \quad (1.74)$$

откуда следует, что

$$E_{\Pi} = -p_e E \cos\alpha + const, \quad (1.75)$$

константу интегрирования можно считать равной нулю ( $const = 0$ ), так как выбор начала отсчёта является произвольным, то получаем следующее выражение для потенциальной энергии диполя:

$$E_{\Pi} = - p_e \cdot E \quad (1.76)$$

Из рисунка 1.21 видно, что внешнее электрическое поле стремится ориентировать диполь так, чтобы вектор его электрического момента  $p_e$  совпал по направлению с вектором  $E$ . Потенциальная энергия электрического диполя в однородном электростатическом поле зависит от ориентации диполя: так при параллельной ориентации векторов  $p_e \uparrow \uparrow E$  угол  $\alpha = 0$  и, следовательно,  $M = 0$ , в этом случае потенциальная энергия диполя во внешнем поле принимает минимальное значение, следовательно, положение равновесия будет устойчивым. В случае отклонении диполя от этого положения вновь возникает механический момент, который возвращает диполь в первоначальное положение. Ещё одним положением равновесия является ситуация, когда дипольный момент направлен против поля  $p_e \uparrow \downarrow E$ , следовательно, угол  $\alpha = \pi$ , а  $M = 0$  будет соответствовать максимальной потенциальной энергии и является неустойчивым, так как при небольших отклонениях от такого положения возникающие силы не возвращают диполь назад, а еще больше отклоняют его.

В более общем случае, потенциальная энергия диполя значительно меньше его средней кинетической энергии, поэтому полная ориентация диполей невозможна в принципе.

Большое внимание, которое было уделено понятию диполя и его свойствам, связано с тем, что диполь является простейшей моделью полярных молекул, которой часто пользуются при изучении поля в веществе. Следует отметить, что электрический дипольный момент является основной характеристикой электрически нейтральных зарядовых систем, и поэтому играет важную роль в различных вопросах теории частиц. Кроме того, электрический диполь – одно из важных понятий в теории излучения электромагнитных волн. Электрический диполь, изменяющийся во времени, является самой простой моделью излучающей системы.

В зависимости от строения различных диэлектриков, выделяют несколько их основных типов.

Атомы, из которых состоят абсолютно все вещества, электрически нейтральны, тем не менее в каждом атоме имеются как положительные, так и отрицательные заряды.

Все имеющиеся в атоме положительные заряды можно условно заменить одним, который находится в некотором воображаемом центре распределения положительных зарядов, и точно также представить, что все отрицательные заряды мы заменяем одним, находящимся в центре распределения отрицательных зарядов.

Исходя из этих соображений, все имеющиеся диэлектрики можно разделить на три группы:

1. Диэлектрики, у которых из-за асимметрии молекул центры распределения положительных и отрицательных зарядов пространственно не совпадают, называют **полярными диэлектриками**. Молекулы таких диэлектриков даже в отсутствие внешнего электрического поля будут иметь ненулевой дипольный момент. У этих диэлектриков есть полюсы – положительный и отрицательный. Ярким примером полярного диэлектрика является молекула воды  $H_2O$ , состоящая из отрицательного иона кислорода и двух положительных ионов водорода.

2. Диэлектрики, молекулы которых являются симметричными, вследствие чего у них центры распределения положительных и отрицательных зарядов пространственно совпадают, называют **неполярными диэлектриками**. За счёт этого в отсутствие внешнего электрического поля такие молекулы не имеют дипольного момента. К ним относятся газы, молекулы которых являются двухатомными:  $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  и другие.

3. Так называемые ионные диэлектрики, представляющие собой кристаллические решетки с правильным чередованием ионов разного знака. Отдельные молекулы в данном случае рассматривать бессмысленно. Примером таких диэлектриков являются соли  $NaCl$  и  $KCl$ .

## § 1.16 Поляризация диэлектрика

При помещении диэлектрика во внешнее электрическое поле в нем возникнет дипольный момент. В полярных диэлектриках в электрическом поле на полюсы диполя действуют силы, стремящиеся ориентировать диполь в направлении электрического поля. Строгой ориентации вдоль поля мешает тепловое движение

диполей, но тем не менее, возникает преимущественная ориентация диполей вдоль поля. Кроме того, даже не зависимо от того, к какой группе из приведённых выше относится диэлектрик (полярный, неполярный или ионный) он в любом случае отреагирует на помещение его в электрическое поле. Такая реакция диэлектрика на внесение его в электрическое поле в физике носит название **поляризация** диэлектрика.

Иначе можно сказать, что поляризация диэлектрика – это возникновение в диэлектрике отличного от нуля дипольного момента.

В зависимости от строения диэлектрика различают три вида поляризации диэлектриков: ориентационная или дипольная поляризация, электронная или деформационная поляризация, а в ионных диэлектриках происходит смещение подрешёток положительных и отрицательных зарядов друг относительно друга.

Для каждого физического явления необходимо вводить величину, количественно его характеризующую, поэтому от качественного описания явления поляризации диэлектрика перейдём к количественному описанию. Количественной характеристикой поляризации диэлектрика служит дипольный момент единицы объёма диэлектрика:

$$P = \frac{1}{V} \sum p_i. \quad (1.77)$$

где  $V$  – объём диэлектрика.

Вектор  $P$  носит название **поляризованность диэлектрика**.

Если диэлектрики относятся к первой группе (полярные диэлектрики) помещаются в поля с не очень высоким значением вектора напряжённости, то допустимо считать, что степень ориентации дипольных моментов молекул прямо пропорциональна величине напряжённости электрического поля. Аналогичные рассуждения можно провести для диэлектриков второй и третьей группы. Таким образом, можно предположить, что поляризованность пропорциональна напряжённости электрического поля:



$$P = \varepsilon_0 \chi E. \quad (1.78)$$

Многочисленные эксперименты подтверждают это для большого числа диэлектриков. Безразмерный коэффициент  $\chi$  в выражении (1.78) носит название **диэлектрическая восприимчивость** диэлектрика.

### § 1.17 Электрическое поле в диэлектрике

Прежде чем рассматривать вопрос об электрическом поле в диэлектрике, введем ряд терминов. Электрическое поле, созданное зарядами, находящимися вне диэлектрика или внутри него, но не принадлежащими материалу этого диэлектрика, назовём внешним полем. Под действием этого поля происходит поляризация диэлектрика, то есть, как было сказано ранее, появляется дипольный момент. Электрические диполи, являясь системой состоящей из заряженных частиц, создают своё поле, которое накладывается на внешнее. Поскольку это поле создано зарядами самого диэлектрика, и при этом данные заряды свободно перемещаться по всему диэлектрику не могут, их называют связанными, а поле таких зарядов, соответственно, полем связанных зарядов.

Согласно принципу суперпозиции напряжённость поля в диэлектрике будет равна:

$$E = E_0 + E', \quad (1.79)$$

где  $E_0$  – напряжённость внешнего поля,

$E'$  – напряжённость поля, создаваемого связанными зарядами.

В качестве примера рассмотрим диэлектрик, который поместили между двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями с разноименными зарядами:

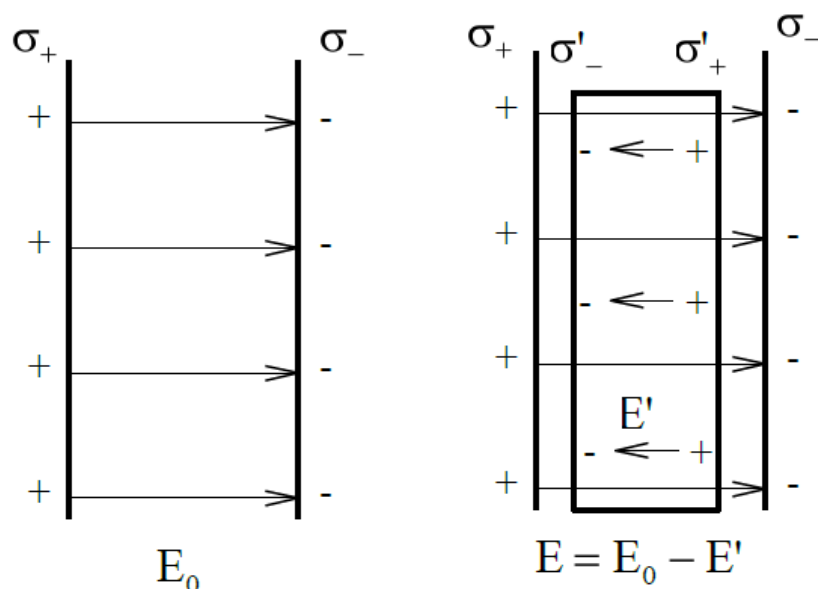


Рисунок 1.22 – К вопросу о поляризации диэлектрика

Создаваемое самими плоскостями поле  $E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . Находящийся между плоскостями диэлектрик будет поляризован. Диполи преимущественно ориентируются по направлению поля, поэтому на поверхности диэлектрика со стороны положительно заряженной пластины будут находиться отрицательно заряженные полюса диполей, а на поверхности, лежащей со стороны отрицательно заряженной пластины, положительные полюсы. Говоря иначе, на границе поляризованного диэлектрика появятся ненулевые поверхностные связанные заряды.

Поставим задачу – найти величину этих зарядов. Для этого рассмотрим некий произвольный объём диэлектрика  $\Delta V$  (рисунок 1.22). Суммарный дипольный момент  $p$  этого объёма равен:  $p = P\Delta V$ .

С другой стороны, опираясь на определение дипольного момента,  $p = q'd$ , где  $d$  – толщина диэлектрика. Кроме того, можно вспомнить, что поверхностная плотность зарядов (в данном случае связанных) находится, как  $q' = \sigma\Delta S$  – модуль связанного заряда на произвольной площадке, принадлежащей выбранному нами объёму диэлектрика.

После сопоставления двух выражений для дипольного момента приходим к выводу о том, что  $\sigma' = P$ .

Учитывая (1.78):

$$\sigma' = \varepsilon_0 \chi E. \quad (1.80)$$

Поле связанных зарядов:  $E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$ , следовательно:

$$E' = \chi E. \quad (1.81)$$

Из рисунка 22 видно, что поле связанных зарядов и внешнее поле имеют встречные направления. Следовательно, напряжённость поля в диэлектрике:

$$E = E_0 - E', \text{ откуда: } E = E_0 - \chi E. \text{ Выразим из последней формулы } E: E = \frac{E_0}{1+\chi}.$$

Величину стоящую в знаменателе обозначим как:

$$\varepsilon = 1 + \chi, \quad (1.82)$$

тогда для напряженности поля  $E$  в диэлектрике:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}. \quad (1.83)$$

Величину  $\varepsilon$  называют диэлектрической проницаемостью, она также как и  $\chi$  является безразмерной величиной. Диэлектрическая проницаемость – электрическая характеристика однородного и изотропного диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость вакуума равна 1. На Земле физические явления происходят чаще не в вакууме, а в воздухе, который является диэлектриком. Диэлектрическая проницаемость воздуха для большинства физических задач также может быть взятой за 1. Если же электрические процессы происходят в диэлектрике, значения напряжённости и потенциала поля меняются. Это необходимо учитывать при записи выражения для закона Кулона (1.1), для взаимодействия точечных зарядов и для

записи формул напряженности и потенциала поля точечного заряда, если поле создано в диэлектрической среде со значением диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  отличной от 1. В частности для напряженности поля заряженной плоскости необходимо писать не  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  как в вакууме, а  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$  или не  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$  как в вакууме, а  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$  и для потенциала не как в случае вакуума  $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ , а  $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{q}{r}$ .

Итак, во всех формулах, как мы видим, появляется дополнительный множитель  $\varepsilon$ , который показывает, что среда несколько ослабляет взаимодействие между электрическими зарядами.

Для удобства расчёта электрических полей в диэлектрике вводят величину, называемую вектором электрического смещения:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E. \quad (1.84)$$

Можно также связать вектор электрическое смещения с вектором поляризованности:

$$D = \varepsilon_0 E + P. \quad (1.85)$$

Необходимо отметить, что напряжённость электрического поля – физическая величина, служащая силовой характеристикой электрического поля. Вектор электрического смещения является величиной вспомогательной, необходимость введения которой связана с удобством расчётов. Единица измерения –  $\frac{Кл}{м^2}$ .

Необходимо отметить, что введение понятия электрического смещения связано с тем, что его величина определяется распределением в пространстве свободных зарядов  $q$ .

Для диэлектриков также вводится теорема Гаусса:

$$\oint_S D_n dS = \sum_V q_i, \quad (1.86)$$

в данном случае  $\sum_V q_i$  – сумма свободных зарядов в объёме  $V$ , ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ .

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Найти поверхностную плотность зарядов на пластинах плоского слюдяного конденсатора ( $\varepsilon = 7$ ), который зарядили до разности потенциалов  $U = 200$  В, если расстояние между его пластинами равно  $d = 0,5$  мм.

Дано:

$$\varepsilon = 7$$

$$U = 200 \text{ В}$$

$$d = 0,5 \text{ мм}$$

Решение:

Электрическое смещение равно:

$$D = \varepsilon \varepsilon_0 E.$$

Найти:

С другой стороны:

$$\sigma - ?$$

$$D = \sigma.$$

В свою очередь, напряжённость электростатического поля равна:

$$E = \frac{U}{d}.$$

В итоге для поверхностной плотности заряда получаем выражение:

$$\sigma = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{d}.$$

Подставив числовые данные в выражение, получаем  $\sigma = 24,8$  мкКл/м<sup>2</sup>.

**Задача 2.** В однородном электростатическом поле напряжённостью  $E_0 = 700$  В/м перпендикулярно его силовым линиям перемещается бесконечная плоскопараллельная пластина ( $\varepsilon = 7$ ). Найти: 1) напряжённость электростатического поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Дано:

$$\varepsilon = 7$$

$$E_0 = 700 \text{ В/м}$$

Решение:

Напряжённость электростатического поля в вакууме и в диэлектрике находятся в следующем соотношении:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

Найти:

$$E - ?$$

$$D - ?$$

$$P - ?$$

$$\sigma' - ?$$

где  $E_0$  – напряжённость поля в вакууме,

$E$  – в диэлектрике, с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ .

Электрическое смещение равно:

$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E.$$

Также можно записать, что:

$$D = \varepsilon_0 E + P,$$

откуда

$$P = D - \varepsilon_0 E.$$

Также необходимо отметить, что поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma'$  равна поляризованности  $P$ :

$$\sigma' = P.$$

Подставляя числовые данные получаем:

$$E = 100 \text{ В/м},$$

$$D = 6,19 \text{ нКл/м}^2,$$

$$P = 5,31 \text{ нКл/м}^2,$$

$$\sigma' = 5,31 \text{ нКл/м}^2.$$

**Задача 3.** Расстояние между пластинами плоского конденсатора равно  $d = 5$  мм. После того, как конденсатор зарядили до разности потенциалов  $U = 500$  В между его пластинами вставили стеклянную пластинку ( $\varepsilon = 7$ ). Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость стекла; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на стеклянной пластинке.

Дано:

$$d = 5 \text{ мм}$$

$$U = 500 \text{ В}$$

$$\varepsilon = 7$$

Решение:

Диэлектрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость связаны соотношением:

$$\chi = \varepsilon - 1.$$

Найти:

Напряжённость электростатического поля в вакууме  $E_0$  равна:

$$E_0 = \frac{U}{d}.$$

$$\chi - ?$$

$$\sigma' - ?$$

Напряжённость электростатического поля в диэлектрике  $E$  равна:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon} = \frac{U}{\varepsilon d}.$$

поверхностную плотность связанных зарядов:

$$\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E = \frac{\chi \varepsilon_0 U}{\varepsilon d}.$$

После подстановки числовых значений в полученные выражения имеем:

$$\chi = 6, \sigma' = 759 \text{ нКл/м}^2.$$

Задания для самостоятельного решения.

1. Между пластинами плоского конденсатора внесли два слоя диэлектрика – слюдяная пластинка ( $\varepsilon_1 = 7$ ) толщиной  $d_1 = 1$  мм и парафин ( $\varepsilon_2 = 2$ ) толщиной  $d_2 = 0,5$  мм. Найти: 1) напряжённость электростатических полей в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, считая, что разность потенциалов между пластинами конденсатора  $U = 500$  В.

2. Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет  $d = 1$  см, разность потенциалов  $U = 200$  В. Определите поверхностную плотность  $\sigma'$  связанных зарядов эбонитовой пластинки ( $\varepsilon = 3$ ), помещенной на нижнюю пластину конденсатора. Толщина пластины  $d_2 = 8$  мм.

3. Свободные заряды равномерно распределены с объёмной плотностью  $\rho = 5$  нКл/м<sup>3</sup> по шару радиусом  $R = 10$  см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon = 5$ . Найти напряжённость электростатического поля на расстояниях  $r_1 = 5$  см и  $r_2 = 15$  см от центра шара.



## Глава 2 Постоянный электрический ток

### § 2.1 Сила тока, плотность тока

Если поместить проводник в электрическое поле, то на свободные электрические заряды со стороны поля начинают действовать сила, что приведёт к перераспределению зарядов и возникновению индуцированных зарядов на концах проводника (смотри §1.13, явление электростатической индукции). Поле индуцированных зарядов имеет по отношению к внешнему электрическому полю противоположное направление, эти поля компенсируют друг друга и движение зарядов через некоторое время прекращается. Электростатическое поле внутри проводника отсутствует.

Но если создать условия, при которых индуцированные заряды не образуются, отводя с помощью соединительных проводов заряды с одной стороны проводника на другую, то в проводнике возникнет электрическое поле и будут свободные носители заряда придут в направленное движение под действием электрического поля (рисунок 2.1).

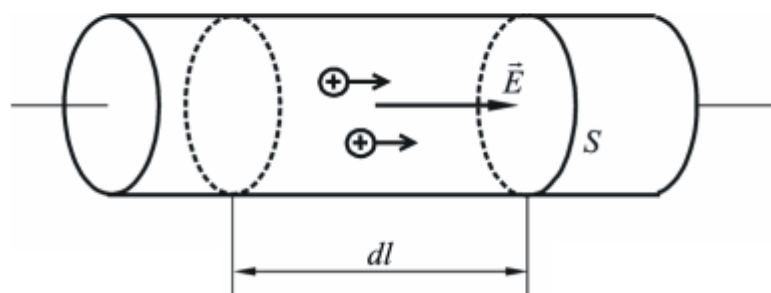


Рисунок 2.1 – Направленное движение заряженных частиц в проводнике

**Электрический ток** представляет собой упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов.

Чтобы количественно описать электрический ток, была введена физическая величина, носящая название **сила тока**. Данный термин введён французским

физиком А. М. Ампером в XIX в. Если через поперечное сечение проводника за время  $dt$  протекает заряд  $dq$ , то сила тока определяется как:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (2.1)$$

Если ток постоянный по величине и направлению, то можно пользоваться выражением  $I = \frac{q}{t}$ .

**Силой тока** называется скалярная физическая величина, равная отношению электрического заряда, проходящего через поперечное сечение за малый промежуток времени, к величине этого промежутка.

В качестве направления тока условно принято направление движения положительных электрических зарядов. Это утверждение было сформулировано в те времена, когда природа электрического тока в металлах, которые наиболее широко представляют категорию проводников, ещё не была известна. Тем не менее, данное утверждение было сохранено из чисто исторических соображений.

Единицей силы тока является «**ампер**» (А); единицы силы тока и заряда связаны соотношением:  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$ .

В том случае, если сила тока и направление тока не меняются со временем, такой ток называют постоянным током, если изменения силы тока и его направления имеют место, то такой ток носит название переменного тока.

Поскольку сила тока – это скалярная величина, то указывать на направление протекания тока она не может, кроме того, если ток течёт по проводнику с большим поперечным сечением, величина переносимого заряда в разных участках сечения может изменяться. Может также изменяться и направление движения заряженных частиц (рисунок 2.2.).

Поэтому возникает необходимость введения величины, которая учитывала указанные выше обстоятельства. Такой величиной является плотность тока.

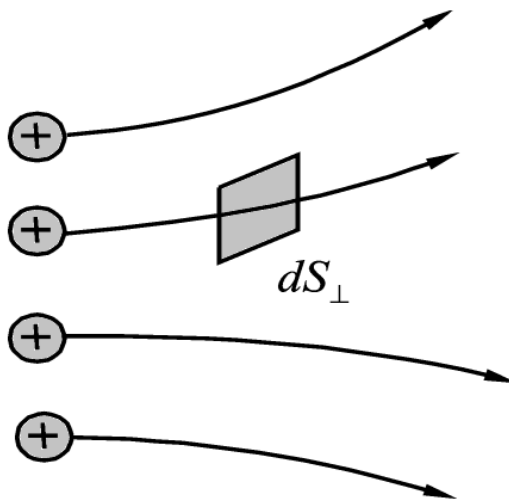


Рисунок 2.2 – К вопросу о плотности тока

Для этого в проводнике выделим произвольный элемент площади, который ориентирован перпендикулярно направлению движения зарядов в данной точке проводника. Будем считать, что сила тока, которая протекает через этот элемент площади, равна  $dI$ . Тогда плотностью тока будем считать величину:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (2.2)$$

Плотность тока – векторная величина, поэтому характеризуется помимо числового значения ещё и направлением движения зарядов. Следовательно, выражение (2.2) определяет модуль плотности тока.

Из сказанного выше можно сделать заключение о том, что **плотность тока** – это вектор, модуль которого равен силе тока через элемент площади, перпендикулярный направлению движения зарядов в данной точке проводника и направленный в сторону движения электрических зарядов.

Далее будет показано, что вектор плотности тока совпадает по направлению с вектором напряжённости электрического поля в данной точке. Если через сечение проводника  $S$  течёт постоянный ток  $I$ , то можно считать, что  $j = \frac{I}{S}$ . Единица измерения плотности тока  $\frac{\text{А}}{\text{м}^2}$ .

Кроме того, можно установить связь между плотностью тока и скоростью движения свободных электрических зарядов. Предположим, что рассматриваемый нами проводник имеет форму цилиндра (хотя это не имеет принципиального значения для данного случая) с сечением  $dS$ , вдоль оси которого направлен вектор напряжённости электрического поля. Считаем, что положительно заряженные частицы двигаются вдоль оси цилиндра (рисунок 2.1). Найдем заряд, который протекает через сечение проводника  $S$  за промежуток времени  $dt$ . Несложно заметить, что все заряды, которые содержатся в части цилиндра с высотой  $l = vdt$  пройдут через рассматриваемое нами сечение проводника. В данном случае  $v$  – скорость направленного движения зарядов.

Заряд, содержащийся в этом объёме, равен  $dq = (enSv)dt$ , где  $e$  – величина элементарного заряда,  $n$  – концентрация носителей заряда,  $vSdt$  – объём части цилиндра.

Сила тока, текущего через сечение проводника, равна  $I = \frac{dq}{dt} = envS$ , а модуль плотности тока  $j = \frac{I}{S_{\perp}} = env$ . Следовательно, направление вектора плотности тока  $j$  совпадает с направлением скорости зарядов:

$$j = env. \tag{2.3}$$

Рассмотрим ещё один важный момент, результат которого пригодится нам в дальнейшем. Ранее нами была рассмотрена теорема Гаусса (1.86).

Данное выражение, учитывая, что заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности  $q = \int_V \rho dV$ , где  $\rho$  – объёмная плотность заряда, можно переписать следующим образом:

$$\int_S DdS = \int_V \rho dV. \tag{2.4}$$

Для получения интегральной формы воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского, которая устанавливает связь между объёмным и поверхностным интегралом:

$$\int_S D dS = \int_V \operatorname{div} D dV, \quad (2.5)$$

соответственно, можно записать, что

$$\int_V \operatorname{div} D dV = \int_V \rho dV. \quad (2.6)$$

Или окончательно:

$$\operatorname{div} D = \rho \quad (2.7)$$

Для переменных полей заряды и токи связаны соотношением

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Читателям самостоятельно предлагается поразмышлять над физическим смыслом знака – в данном выражении.

Использование частной производной по времени в данном случае связано с тем, что заряд в общем случае, может изменяться не только со временем, но и в пространстве:

$$I = \int_S j dS. \quad (2.9)$$

Следовательно, можно записать, что

$$\int_S j dS = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (2.10)$$

Воспользуемся теоремой Гаусса – Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} j dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV. \quad (2.11)$$

или

$$\operatorname{div} j = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) является по сути законом сохранения заряда. Следовательно, источником тока проводимости является изменение заряда во времени.

Дифференциальная форма записи закона сохранения заряда выглядит следующим образом:

$$\nabla \cdot j = - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.13)$$

## § 2.2 Закон Ома для однородного участка цепи

В XIX в. немецкий физик Г. Ом эмпирически установил, как в однородном проводнике сила тока зависит от приложенного к проводнику напряжения: текущий по проводнику ток пропорционален напряжению, приложенному к проводнику.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R} \quad (2.14)$$

Данное выражение является законом Ома для однородного проводника. Коэффициент пропорциональности  $R$ , содержащийся в выражении (2.14) носит название **электрическое сопротивление**. Он является характеристикой проводящих свойств проводника, и далее о нём будет сказано подробнее, пока мы лишь ограничимся рассмотрением его в качестве коэффициента пропорциональности между силой тока в проводнике и приложенному к проводнику напряжением.

Единица измерения сопротивления – Ом.

Необходимо отметить, что закон Ома выполняется не всегда, в частности, в тех случаях, когда сопротивление проводника не является постоянной величиной (например, в результате протекания по проводнику больших по величине токов) или в так называемых нелинейных элементах электрических цепей (вакуумный или полупроводниковый диоды) данный закон также не применим.

Ранее нами феноменологически была введена величина, которая носит название **электрического сопротивления** или просто **сопротивления**. Теперь необходимо выяснить, от чего она зависит.

Сопротивление проводника определяется формой и размерами, а также материалом из которого он изготовлен. Всё это можно представить в виде:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.15)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление проводника коэффициент, характеризующий свойства материала проводника,

$l$  – длина проводника,

$S$  – площадь его поперечного сечения.

Единицей измерения удельного сопротивления в системе СИ является Ом· м.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Две проволоки медная и алюминиевая имеют равную длину  $l$  и одинаковое электрическое сопротивление  $R$ . Во сколько раз медная проволока тяжелее алюминиевой?

Дано:

$$l_M = l_A = l$$

$$R_M = R_A = R$$

$$\rho_A = 0,025 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$$

$$\rho_M = 0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$$

$$\rho'_M = 2600 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho'_A = 2600 \text{ кг/м}^3$$

Найти:

$$\frac{m_M}{m_A} - ?$$

Решение:

Сопротивление проволоки зависит от рода материала из которого она изготовлена, её длины и площади поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

$S$ – площадь поперечного сечения проволоки.

Площадь поперечного сечения, считая, что проволока имеет цилиндрическую форму, можно определить как:

$$S = \frac{V}{l} = \frac{m}{\rho' l}.$$

По условию задачи

$$R = \rho_A \frac{l}{S_A} = \rho_M \frac{l}{S_M}.$$

Откуда следует, что



$$\frac{\rho_A}{S_A} = \frac{\rho_M}{S_M}$$

Значит

$$\frac{\rho_A \rho'_A}{m_A} = \frac{\rho_M \rho'_M}{m_M}.$$

Откуда

$$\frac{m_M}{m_A} = \frac{\rho_M \rho'_M}{\rho_A \rho'_A} = \frac{\rho_M}{\rho_A}.$$

То есть массы проволок относятся так же, как их удельные сопротивления.

Подставляя числовые данные, получаем  $\frac{m_M}{m_A} = 2,2$ .

**Задача 2.** Катушка, изготовленная из медной проволоки, имеет сопротивление  $R = 10,8$  Ом. Какую длину и диаметр имеет проволока, если её масса  $m = 3,41$  кг?

Дано:

$$R = 10,8 \text{ Ом}$$

$$m = 3,41 \text{ кг}$$

$$\rho = 2600 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_M = 0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$$

Решение:

Сопротивление проволоки определяется по формуле:

$$R = \rho_M \frac{l}{S}. \quad (1)$$

Масса проволоки может быть найдена из соотношения:

Найти:

$l$  – ?

$$m = V\rho,$$

$d$  – ?

где  $\rho$  – плотность меди, а  $V$  – объём проволоки.

Поскольку  $V = Sl$ , то масса медной проволоки равна

$$m = Sl\rho.$$

Откуда можно получить

$$l = \frac{m}{S\rho}. \quad (2)$$

Подставим (2) в (1) и получим:

$$R = \rho \frac{m}{S^2\rho},$$

откуда площадь поперечного сечения проволоки равна:

$$S = \sqrt{\frac{\rho_M m}{R\rho}}. \quad (3)$$

С другой стороны

$$S = \pi \frac{d^2}{4}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\pi \frac{d^2}{4} = \sqrt{\frac{\rho_M m}{R\rho}},$$

откуда

$$d = \sqrt[4]{\frac{16\rho_M t}{\pi^2 R \rho}}$$

Подставив числовые данные в полученное выражение, найдем  $d = 1$  мм.

Подставим выражение (4) в выражение (2) и найдем длину проволоки:

$$l = \frac{4t}{\pi d^2 \rho}$$

Подстановка значений в полученную формулу даёт  $l = 505$  м.

**Задача 3.** Напряжение  $U$  на шинах электростанции равно 6,6 кВ. Потребитель электроэнергии расположен на расстоянии  $l = 10$  км. Найти площадь сечения медного провода  $S$ , который необходимо использовать для создания двухпроводной линии электропередачи, если сила тока  $I$  в линии составляет 20 А и потери напряжения в проводах не должны быть более 3% .

Дано:

$$U = 6,6 \text{ кВ}$$

$$l = 10 \text{ км}$$

$$I = 20 \text{ А}$$

$$\rho = 0,017 \text{ мкОм}\cdot\text{м}$$

$$\eta = 0,03$$

Найти:

Решение:

Сопротивление провода:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (1)$$

Так как ток протекает по двум проводам, то их общая длина составляет  $2l$  и выражение (1) примет вид:

$S - ?$

$$R = \rho \frac{2l}{S}.$$

Согласно закону Ома

$$U = IR.$$

Так как существуют потери напряжения в проводах, то следует записать:

$$U\eta = \frac{2\rho l I}{S},$$

откуда

$$S = \frac{2\rho l I}{U\eta}.$$

Подставляя числовые данные из условия задачи, получаем что площадь сечения провода равна  $35 \text{ мм}^2$ .

Задания для самостоятельного решения.

1. На фарфоровый цилиндр радиусом  $a = 2,5 \text{ см}$ , необходимо намотать нихромовую проволоку диаметром  $d = 1 \text{ мм}$ , для создания печи сопротивлением  $R = 40 \text{ Ом}$ . Сколько витков проволоки для этого понадобится?

2. Определить падения потенциала  $U$  в сопротивлениях  $R_1 = 4 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$  и  $R_3 = 4 \text{ Ом}$ , если амперметр показывает ток  $I_1 = 3 \text{ А}$ . Чему равны токи  $I_2$  и  $I_3$  в сопротивлениях  $R_2$  и  $R_3$ .

3. Сопротивление вольтметра  $R_V$  считается бесконечно большим. По показаниям амперметра и вольтметра требуется определить сопротивление  $R$ . Чему

равна относительная погрешность  $\frac{\Delta R}{R}$  вычисленного таким способом сопротивления, если в действительности сопротивление вольтметра равно  $R_V$ . Задачу решить для  $R_V = 1000$  Ом и сопротивления: а)  $R = 10$  Ом; б)  $R = 100$  Ом; в)  $R = 1000$  Ом.

### § 2.3 Закон Ома в дифференциальной форме

Ранее нами было установлено, что вдоль сечения свойства проводника могут меняться и быть различными. Теперь выясним, как изменяются вдоль сечения проводника плотность тока при изменении проводящих свойств. Для этой цели рассмотрим однородный цилиндрический проводник. В нашем случае  $I = jS$ ,  $R = \rho \frac{l}{S}$ ,  $U = El$ . Подстановка этих выражений в закон Ома даст нам:

$$j = \frac{1}{\rho} E. \quad (2.16)$$

Плотность тока и напряжённость электрического поля – векторные величины, так как мы считаем, что положительные заряды движутся в направлении вектора напряженности электрического поля  $E$ , получаем:

$$j = \sigma E, \quad (2.17)$$

где  $\sigma$  – удельная электропроводность, величина обратная удельному сопротивлению  $\rho$  (единицы измерения См/м сименс на метр).

Соотношение (2.17) носит название закона Ома в дифференциальной форме. Соответственно, выражение (2.17) представляет собой закон Ома в интегральной форме.

Закон Ома в дифференциальной форме имеет важное значение поскольку связывает между собой макроскопические (плотность тока) и микроскопические величины (напряжённость электрического поля), характеризующие одно и то же

физическое явление. Кроме того, выражение (2.17) является справедливым для каждой точки проводника, даже если он является неоднородным по своим характеристикам.

## §2.4 Электродвижущая сила

В начале главы упоминалось о том, что могут быть созданы условия, при которых на поверхности проводника в электрическом поле не формируются индуцированные заряды. Электрические цепи постоянного тока являются замкнутыми контурами, в которых свободные заряды перемещаются по замкнутым траекториям.

Под действием сил электрического поля заряды из точек с большим значением потенциала перемещаются к точкам с меньшим значением потенциала.

В процессе движения заряженные частицы тратят часть своей кинетической энергии на столкновение с атомами кристаллической решётки проводника. За счёт работы сил электростатического поля эти потери энергии компенсируются, что в свою очередь приводит к уменьшению потенциальной энергии заряженных частиц в электрическом поле (в противном случае бы нарушался закон сохранения энергии). Но нам уже известно, что при движении заряженных частиц по замкнутой траектории работа сил электростатического поля равна нулю. Это означает, что существуют такие участки траектории, на которых электрическое поле тормозит заряженные частицы. Иначе говоря, создать непрерывное движение заряженных частиц по замкнутому контуру, только за счёт действия электростатических сил, невозможно. Чтобы движение зарядов стало непрерывным, в электрической цепи должно обязательно присутствовать устройство, в котором за счёт сил неэлектрического происхождения над зарядом совершалась бы работа, и он приобретал в результате дополнительную потенциальную энергию. Эти силы должны быть любой природы кроме электрической, поэтому их называют **сторонними силами**.

В электрической цепи, устройства, в которых сторонние силы совершают работу над заряженными частицами называют источниками тока. Под действием сторонних сил внутри источника заряженные частицы двигаются против сил электрического поля. Сторонние силы действуют не во всей электрической цепи, а только в источнике тока.

Сторонние силы имеют различную природу: в аккумуляторах и гальванических элементах их природой являются протекающие там химические реакции, в электрических генераторах – за счёт механической энергии вращающегося ротора, в фотоэлементах – за счёт энергии фотонов и т. д.

Электродвижущей силой источника тока (ЭДС) называется физическая величина, равная отношению работы сторонних сил по переносу заряда  $q_0$  в замкнутой цепи к величине переносимого заряда:

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{ст}}}{q_0}. \quad (2.18)$$

Очевидно, что ЭДС имеет ту же самую единицу измерения, что и потенциал – вольт. Ещё одной характеристикой источника тока служит его внутреннее сопротивление. Под действием сил электрического поля свободные заряды участвуют в упорядоченном движении. При рассмотрении закона Ома для однородного проводника нами было введено понятие сопротивления. В случае движения заряженных частиц под действием сторонних сил, также можно ввести сопротивление, которое называют внутренним.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Коэффициент полезного действия батарей с ЭДС  $\varepsilon = 10$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом равен  $\eta = 0,8$ . Какой ток будет показывать амперметр, если падения потенциала на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_4$  равны  $U_1 = 4$  В и  $U_4 = 2$  В. Чему равно падение потенциала  $U_2$  на сопротивлении  $R_2$ .

Дано:

Решение:

$$\mathcal{E} = 10 \text{ В}$$

$$r = 1 \text{ Ом}$$

$$U_1 = 4 \text{ В}$$

$$U_4 = 2 \text{ В}$$

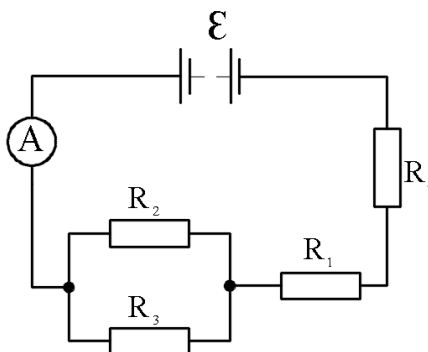
Согласно закону Ома для полной цепи, ток, текущий через амперметр, равен:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (1)$$

Найти:

$$I - ?$$

$$R_2 - ?$$



Полное сопротивление цепи можно найти из соотношения для КПД батареи:

$$\eta = \frac{R}{R + r},$$

откуда

$$R = \frac{r\eta}{1 - \eta}.$$

Подстановка числовых значений даёт  $R = 4 \text{ Ом}$ .

Тогда из выражения (1) ток  $I = 2 \text{ А}$ .

По второму правилу Кирхгоффа:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = \mathcal{E}.$$

Поскольку напряжения на параллельных участках одинаковы



и  $U_2 = U_3$ , можно записать:

$$U_1 + 2U_2 + U_4 = \mathcal{E},$$

следовательно,

$$U_2 = \frac{\mathcal{E} - U_1 - U_4}{2}.$$

После подстановки числовых значений получаем  $U_2 = 2$  В.

**Задача 2.** Элемент, амперметр и некоторое сопротивление соединены последовательно. В случае подключения резистора из медной проволоки длиной  $l = 100$  м и поперечным сечением  $S = 2$  мм<sup>2</sup>, то амперметр покажет ток  $I_1 = 1,43$  А. При замене его на резистор из алюминиевой проволоки длиной  $l = 57,3$  м и поперечным сечением  $S = 1$  мм<sup>2</sup> амперметр будет показывать ток  $I_2 = 1$  А. Сопротивление амперметра  $R_A = 0,05$  Ом. Определить ЭДС  $\mathcal{E}$  элемента и его внутреннее сопротивление  $r$ .

Дано:

Решение:

$$l = 100 \text{ м}$$

$$S = 2 \text{ мм}^2$$

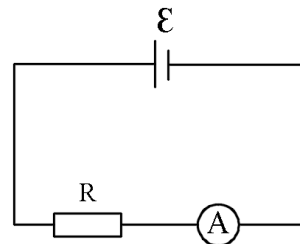
$$I_1 = 1,43 \text{ А}$$

$$l = 57,3 \text{ м}$$

$$S = 1 \text{ мм}^2$$

$$I_2 = 1 \text{ А}$$

$$R_A = 0,05 \text{ Ом}$$



Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R_A + R'}$$

Найти:

$$\mathcal{E} - ?$$

$$r - ?$$

где в свою очередь сопротивление:

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала проволоки.

Тогда для медной и алюминиевой проволоки имеем соответственно:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_A + \frac{\rho_1 l_1}{S_1}} \quad (1)$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{r + R_A + \frac{\rho_2 l_2}{S_2}} \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получаем:

$$r = \frac{I_1 R_A + \frac{\rho_2 l_2}{S_2} - I_2 R_A + \frac{\rho_1 l_1}{S_1}}{I_1 - I_2}.$$

Подставляя числовые значения получаем  $r = 0,5$  Ом.

Из выражения (1) находим ЭДС источника тока:

$$\mathcal{E} = I_1 \left( r + R_A + \frac{\rho_1 l_1}{S_1} \right).$$

ЭДС источника равно 2 В.

**Задача 3.** ЭДС батареи  $\mathcal{E} = 100$  В, резисторы имеют сопротивления  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 200$  Ом и  $R_3 = 300$  Ом, сопротивление вольтметра  $R_V = 2$  кОм. Определить разность потенциалов  $U$ , которую показывает амперметр?

Дано:

$$\mathcal{E} = 100 \text{ В}$$

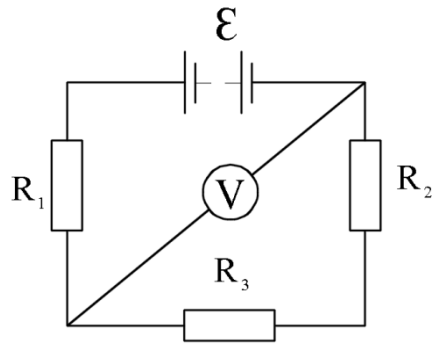
$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 200 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 300 \text{ Ом}$$

$$R_V = 2 \text{ кОм}$$

Решение:



Найти:

$U - ?$

Закон Ома для полной цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r'}$$

и поскольку внутренним сопротивлением источника позволяет пренебречь условие задачи, получаем:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (1)$$

Полное сопротивление цепи найдем из соотношения:

$$R = R_1 + R'. \quad (2)$$

Тогда полное сопротивление цепи:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_2 + R_3}$$

$$R' = \frac{R_V R_2 + R_3}{R_2 + R_3 + R_V}.$$

Подставляя числовые данные, получаем  $R' = 400 \text{ Ом}$ .

Тогда из выражения (2) получим полное сопротивление цепи:

$$R = 500 \text{ Ом}.$$

Из выражения (1) найдем ток  $I = 0,2 \text{ А}$ .

Ток, протекающий через сопротивления  $R_2$  и  $R_3$ , равен току  $I$ .

Следовательно,

$$I = I_V + I_{23},$$

где

$$I_V = \frac{U}{R_2 + R_3}.$$

То есть

$$I = \frac{U}{R_V} + \frac{U}{R_2 + R_3} = \frac{U R_2 + R_3 + R_V}{R_V R_2 + R_3}$$

или же

$$I = \frac{U}{R'}.$$

Откуда получаем

$$U = IR'.$$

Показания вольтметра, таким образом, равны 80 В.

Задания для самостоятельного решения.

1. Элемент с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  замкнут на внешнее сопротивление  $R$ . Максимальная мощность, которая может выделяться во внешней цепи равна  $P = 9$  Вт. В цепи протекает ток  $I = 3$  А. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление  $r$  элемента.

2. Элемент с ЭДС  $\mathcal{E} = 2$  В и внутренним сопротивлением  $r = 0,5$  Ом замкнут на внешнее сопротивление  $R$ . Постройте график зависимости от сопротивления  $R$ : 1) тока  $I$  в цепи; 2) падения потенциала  $U$  во внешней цепи; 3) полезной мощности  $P$  и полной мощности  $P_0$ . Сопротивление изменяется в пределах  $0 \leq R \leq 4$  Ом через каждые 0,5 Ом.

3. Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление  $R_1 = 2$  Ом, а затем на внешнее сопротивление  $R_2 = 0,5$  Ом. В каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна  $P = 2,54$  Вт. Найти ЭДС элемента и его внутреннее сопротивление  $r$ .

## § 2.5 Работа электрического тока. Закон Джоуля-Ленца

В 1841 году английский физик Дж. Джоуль и независимо от него в 1842 году русский физик Э. Х. Ленц установили физический закон, который позволяет дать оценку тепловому действию электрического тока.

Действительно, если в проводнике протекает ток с силой  $I$ , то за время  $dt$ , сквозь сечение проводника пройдет заряд, равный:  $dq = Idt$ . Так как заряд пространственно переместился, то можно считать, что силами электрического поля была совершена работа по его перемещению:

$$dA = dq \varphi_1 - \varphi_2 = IUdt \quad (2.19)$$

Мощность, развиваемая на исследуемом участке цепи

$$P = \frac{dA}{dt} = IU \quad (2.20)$$

Совершаемая электрическим током работа приводит к выделению тепловой энергии. При отсутствии переходов энергии в другие формы, работа переходит в тепловую энергию. Учитывая, что согласно закону Ома напряжение  $U = IR$ , можно получить выражения для количества тепла  $Q$  и мощности  $P$ :

$$Q = I^2 R t, \quad (2.21)$$

$$P = I^2 R. \quad (2.22)$$

Выражение (2.21) называют законом Джоуля-Ленца в интегральной форме.

По аналогии с законом Ома в дифференциальной форме можно вывести и закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Для этого нам потребуется ввести новую величину – **удельную тепловую мощность тока  $w$** :

$$w = \frac{Q}{dV dt}. \quad (2.23)$$

Физический смысл этой величины – количество тепла, выделившееся в единичном объёме проводника за единицу времени.

Снова рассмотрим цилиндрический однородный проводник. Подставим в выражение (2.22) формулы  $R = \rho \frac{l}{S}$  и  $I = jS$ :

$$P = \rho j^2 V, \quad (2.24)$$

где  $V = Sl$ .

Из выражения (2.24) видно, что мощность, выделяющаяся в единице объёма проводника, то есть удельная тепловая мощность тока, равна:

$$w = \rho j^2. \quad (2.24)$$

Воспользовавшись дифференциальной формой закона Ома  $j = \sigma E$  и выражением  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ , можно получить закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$w = jE = \sigma E^2. \quad (2.26)$$

Закон, установленный Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем, по праву считается одним из выдающихся открытий, сделанных в XIX в. Электрический ток совершает работу, которую можно превратить в тепло, в механическую работу или другие виды энергии. Данное открытие показало, что с помощью электрического тока энергию можно передавать на расстояние. Иными словами, в основе технической революции конца XIX – начала XX вв. лежит открытие Джоуля и Ленца.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Спираль калориметра имеет сопротивление  $R_1 = 60$  Ом. Сопротивление резистора  $R_2 = 30$  Ом. В калориметр налита вода массой  $m = 480$  г воды, амперметр показывает ток  $I = 6$  А. На сколько нагреется вода за время  $t = 5$  мин протекания тока?

Дано:

$$R_1 = 60 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 30 \text{ Ом}$$

$$I = 6 \text{ А}$$

$$m = 480 \text{ г}$$

$$t = 5 \text{ мин}$$

Решение:

Поскольку при протекании тока по проводнику в нём выделяется тепло, то за время  $t$  в проводнике выделится количество тепла:

$$Q = I_1^2 R_1 t. \quad (1)$$

Найти:

В данном случае, ток  $I_1$  – это ток, текущий через спираль.

Так как спираль и сопротивление  $R_2$  соединены параллельно,

$\Delta T - ?$

то напряжения на них одинаковы:  $U_1 = U_2 = U$ , а сила тока складывается:  $I = I_1 + I_2$ .

Сопротивление параллельного участка определяется как

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Тогда сила тока  $I_1$  равна:

$$I_1 = \frac{U}{R_1}.$$

Причём, напряжение  $U$  равно:

$$U = IR_{12} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Отсюда можно найти ток  $I_1$ :

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Подстановка численных значений даёт  $I_1 = 2$  А.

Выделившееся количество тепла пошло на нагревание воды:

$$Q = cm\Delta T \tag{2}$$

где  $c = 4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг·К) – удельная теплоёмкость воды,  $\Delta T$  – изменение температуры.

Приравняв правые части выражений (1) и (2), получим:



$$I_1^2 R_1 t = cm\Delta T$$

$$\Delta T = \frac{I_1^2 R_1 t}{cm}$$

Подставив численные значения, получаем  $\Delta T = 36$  К.

**Задача 2.** Электрический чайник в котором находится вода объёмом  $V = 600 \text{ см}^3$  воды при и температурой  $T_0 = 282$  К, забыли выключить. Нагреватель чайника имеет сопротивление  $R = 16$  Ом. Напряжение сети  $U = 120$  В, КПД нагревателя  $\eta = 0,6$ . Определите время, за которое вода в чайнике полностью выкипит.

Дано:

$$V = 600 \text{ см}^3$$

$$T_0 = 282 \text{ К}$$

$$R = 16 \text{ Ом}$$

$$U = 120 \text{ В}$$

$$\eta = 60\%$$

Решение:

Согласно закону Джоуля-Ленца:

$$Q_{\text{полн}} = I^2 R t$$

$$Q_{\text{полез}} = Q_1 + Q_2.$$

Для того, чтобы вода закипела, ей необходимо сообщить количества теплоты  $Q_1$  равное:

Найти:

$$t - ?$$

$$Q_1 = cm T_K - T_0 ,$$

где  $T_K = 373$  К – температура кипения воды.

Количество тепла, необходимое для испарения воды  $Q_2$  можно найти как:

$$Q_2 = r m.$$

Согласно закону сохранения энергии:

$$Q_{\text{ПОЛЕЗН}} = \eta Q_{\text{ПОЛН}},$$

тогда

$$cm T_K - T_0 + rm = \eta I^2 R t.$$

Кроме того,  $m = \rho V$ .

Из закона Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Следовательно,

$$\rho V c T_K - T_0 + r = \eta \frac{U^2}{R} t.$$

Окончательно получаем:

$$t = \frac{\rho V c T_K - T_0 + r}{\eta U^2}.$$

Подставляя числовые значения, находим время  $t = 49$  мин.

**Задача 3.** В ртутном диффузионном насосе в единицу времени испаряется масса  $m_t = 100$  г/мин ртути. Найти сопротивление  $R$  нагревателя насоса, если он подключен в сеть с напряжением  $U = 127$  В? Удельная теплота парообразования ртути  $q = 296$  кДж/кг.

Дано:

$$m_t = 100 \text{ г/мин}$$

$$U = 127 \text{ В}$$

$$q = 296 \text{ кДж/кг}$$

Решение:

Для испарения ртути, ей необходимо сообщить количество теплоты

$$Q = qm. \quad (1)$$

Найти:

Из закона Джоуля-Ленца следует:

$R - ?$

$$Q = IUt. \quad (2)$$

Поскольку левые части выражений (1) и (2) совпадают, то можно приравнять и правые части:

$$qm = IUt.$$

Тогда сила тока нагревателя насоса:

$$I = \frac{qm}{Ut} = \frac{qm_t}{U},$$

Из закона Ома можно выразить сопротивление нагревателя насоса:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{qm_t}.$$

Подставив числовые значения, получим значение сопротивления насоса  $R = 32,69 \text{ Ом}$ .

Задания для самостоятельного решения.

1. Определите количество теплоты  $Q_t$ , выделившееся в единицу времени в единице объёма медного провода, если плотность тока равна  $j = 300 \text{ кА/м}^2$ .
2. Определить мощность, которую потребляет нагревательный элемент электрического чайника, если вода объёмом 1 л закипает через 5 мин? Чему равно сопротивление нагревателя если напряжение в сети 120 В, а температура воды  $13,5^\circ \text{ С}$ .
3. Две электрические лампочки с сопротивлениями  $R_1 = 360 \text{ Ом}$  и  $R_2 = 240 \text{ Ом}$  параллельно включены в сеть. Какая из лампочек потребляет большую мощность? Во сколько раз?

## § 2.6 Закон Ома для неоднородной цепи

Если на участке электрической цепи действуют сторонние силы (т.е. силы неэлектрической природы), то такой участок носит название неоднородного участка электрической цепи (рисунок 2.4).

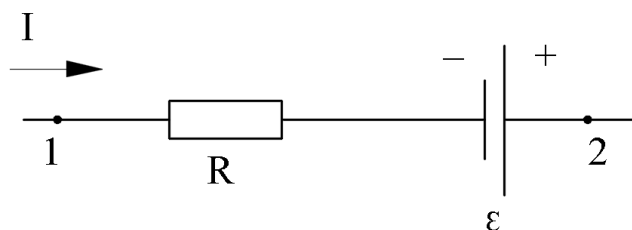


Рисунок 2.4 – Неоднородный участок электрической цепи

Работа сил (электрических и сторонних) на участке 1 – 2, совершаемая над заряженной частицей определяется как:

$$A_{12} = q \varphi_1 - \varphi_2 + q\varepsilon_{12}. \quad (2.27)$$

В случае отсутствия перехода работы в другие формы энергии, за исключением тепловой, то  $A_{12} = Q$ .

В соответствии с законом Джоуля-Ленца количество тепла, выделяемое в проводнике, равно  $Q = I^2Rt$ , а протекающий по нему заряд  $q = It$ . Подставив эти выражения в формулу (2.27), получаем:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}, \quad (2.28)$$

откуда сила тока на неоднородном участке электрической цепи

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}, \quad (2.29)$$

где  $R$  – полное сопротивление цепи,

$R = R_{\text{нагрузки}} + r$ , в данном выражении  $R_{\text{нагрузки}}$  – сопротивление нагрузки,

$r$  – внутреннее сопротивление источника.

Выражение (2.29) представляет собой закон Ома для неоднородной цепи.

Можно рассмотреть ряд частных случаев, являющихся следствием выражения (2.29):

1) В случае отсутствия на участке 1 – 2 источника тока участок является однородным, и мы получаем закон Ома для однородного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}$$

2) Если цепь замкнута (рисунок 2.5), то  $\Delta\varphi = 0$  (поскольку точки 1 и 2 совпадают) поэтому

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{нагрузки}} + r}$$

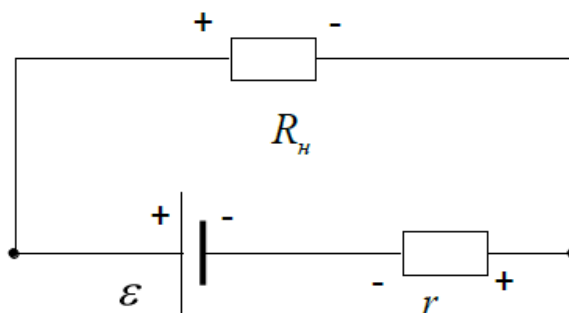


Рисунок 2.5 – Замкнутая цепь

3) Если цепь разомкнута, то  $I = 0$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = \varepsilon_{12}$ , или ЭДС, действующая в разомкнутой цепи равна разности потенциалов на её концах.

4) Случай, когда точки цепи, имеющие разное значение потенциала (например, полюсы источника тока), приводят в контакт. Сопротивление в зоне

контакта имеет небольшое значение (как правило ограничивается малым внутренним сопротивлением источника тока), что приводит к резкому возрастанию силы тока. В этом  $R_{\text{нагрузки}} = 0$ , а сила тока  $I = \frac{\varepsilon}{r}$ .

Примеры решения задач.

**Задача 1.** При внешнем сопротивлении  $R_1 = 50$  Ом ток в цепи  $I_1 = 0,2$  А, а при  $R_2 = 110$  Ом,  $I_2 = 0,1$  А. Найти ток короткого замыкания источника ЭДС.

Дано:

Решение:

$$R_1 = 50 \text{ Ом}$$

$$I_1 = 0,2 \text{ А}$$

$$R_2 = 110 \text{ Ом}$$

$$I_2 = 0,1 \text{ А}$$

В случае короткого замыкания ток равен:

$$I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Ток в цепи при внешнем сопротивлении  $R_1$  равен

$I_{\text{кз}} - ?$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + r}.$$

Ток в цепи при внешнем сопротивлении  $R_2$  равен

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2 + r}.$$

Так как ЭДС источника не изменилась, то можно записать:

$$I_1 R_1 + r = I_2 R_2 + r .$$

Внутреннее сопротивление источника равно:

$$r = \frac{I_2 R_2 - I_1 R_1}{I_1 - I_2}.$$

Сила тока короткого замыкания:

$$I_{\text{кз}} r = I_1 R_1 + r$$

$$I_{\text{кз}} = I_1 \frac{R_1}{r} + 1 = I_1 \frac{R_1 I_1 - I_2}{I_2 R_2 - I_1 R_1} + 1 .$$

Подставляя числовые значения, получаем ток короткого замыкания:  $I_{\text{кз}} = 1,2 \text{ А}$ .

**Задача 2.** При силе тока 4 А во внешней цепи развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А – 8 Вт. Чему равно ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутреннее сопротивление  $r$  источника тока.

Дано:

$$I_1 = 4 \text{ А}$$

$$P_1 = 10 \text{ Вт}$$

$$I_2 = 2 \text{ А}$$

$$P_2 = 8 \text{ Вт}$$

Найти:

$$\mathcal{E} - ?$$

$$r - ?$$

Решение:

Мощность тока в цепи:

$$P = \mathcal{E} I .$$

Для неоднородного участка цепи закон Ома выглядит следующим образом:

$$\mathcal{E} = I R + r .$$

При силе тока  $I_1$  мощность во внешней цепи:

$$P_1 = \mathcal{E} I_1 - I_1^2 r .$$

Внутреннее сопротивление цепи:

$$r = \frac{\mathcal{E} I_1 - P_1}{I_1^2} .$$

Мощность во внешней цепи при сила тока  $I_2$ :

$$P_2 = \mathcal{E}I_2 - I_2^2 r$$

$$P_2 = \mathcal{E}I_2 - \frac{I_2^2}{I_1^2} \mathcal{E}I_1 - P_1 .$$

Или можно записать следующим образом:

$$P_2 = \mathcal{E}I_2 - \mathcal{E} \frac{I_2^2}{I_1} + P_1 \frac{I_2^2}{I_1^2}.$$

Для ЭДС получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{P_2 - P_1 \frac{I_2^2}{I_1^2}}{I_2 - \frac{I_2^2}{I_1}}.$$

А внутреннее сопротивление  $r$ :

$$r = \frac{\mathcal{E}}{I_1} - \frac{P_1}{I_1^2}.$$

Подстановка в полученные нами выражения числовых значений даёт:  $\mathcal{E} = 5,5$  В,  $r = 0,75$  Ом.

**Задача 3.** На рисунке представлена электрическая схема в которой  $R_1 = R_2 = 50$  Ом,  $R_3 = 50$  нФ. Найти ЭДС источника тока, полагая его внутреннее сопротивление равным нулю, если заряд на конденсаторе  $q = 2,2$  мкКл.



Дано:

Решение:

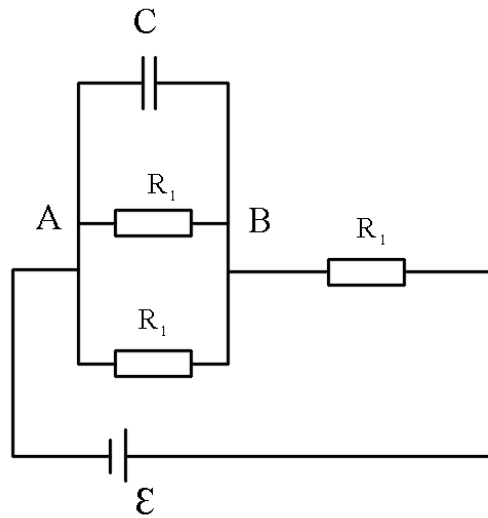
$$R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 50 \text{ нФ}$$

$$q = 2,2 \text{ мкКл}$$

Найти:

$$\mathcal{E} - ?$$



Напряжения на параллельных участках должны быть равны следовательно:

$$U = U_C = \frac{q}{C}.$$

Резисторы  $R_1$  и  $R_2$  соединены параллельно, с учетом этого можно записать, что напряжение  $U$  равно:

$$U = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

С учетом того, что  $U = \frac{q}{C}$  получаем:

$$I = \frac{q R_1 + R_2}{C R_1 R_2}.$$

Напряжение  $U_3$  находим следующим образом:

$$U_3 = IR_3 = \frac{q R_1 + R_2 R_3}{CR_1R_2}.$$

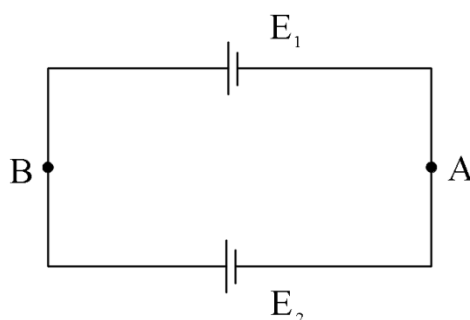
ЭДС источника должно быть равно сумме напряжений  $U$  и  $U_3$ :

$$\mathcal{E} = U + U_3 = \frac{q}{C} \left( 1 + \frac{R_1 + R_2 R_3}{R_1R_2} \right).$$

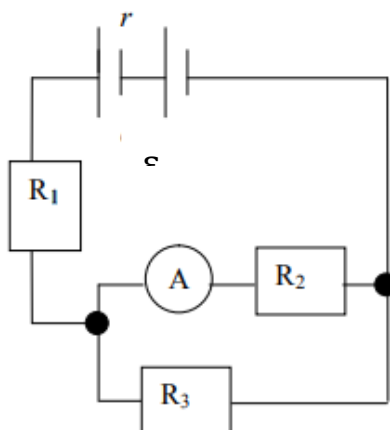
Подставив числовые данные, получаем, что ЭДС равно 220 В.

Задания для самостоятельного решения.

1. Два элемента соединены «навстречу» друг другу, как показано на рисунке. Найти разность потенциалов между точками А и В, если  $\mathcal{E}_1 = 1,4$  В,  $r_1 = 0,4$  Ом,  $\mathcal{E}_2 = 1,8$  В,  $r_2 = 0,6$  Ом.



2. Батарея аккумуляторов с ЭДС  $\mathcal{E} = 2,8$  В включена в цепь как показано на схеме. Сопротивления резисторов  $R_1 = 3,6$  Ом;  $R_2 = 4$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом. Показания амперметра  $I_2 = 0,24$  А. Найти внутреннее сопротивление батареи. Сопротивлением амперметра пренебречь.



3. Сопротивление потенциометра, который подключен к источнику тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 150$  В и внутренним сопротивлением  $r = 50$  Ом равно  $R = 100$  Ом. Найти показание вольтметра с сопротивлением  $R_B = 200$  Ом, соединенного проводником с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом с серединой его обмотки. Чему равна разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключенном вольтметре?

### § 2.7 Приборы для измерения силы тока и напряжения

Для измерения величины силы тока и напряжения пользуются электроизмерительными приборами. Приборы, предназначенные для измерения силы тока, называют амперметрами, для измерения напряжения – вольтметрами.

Амперметр имеет малое электрическое сопротивление, чтобы при включении его в электрическую цепь не вносить сильные искажения в показания. В связи с этим, недопустимо подключать амперметр параллельно, к исследуемому участку цепи, так как это приведет к тому, что через амперметр потечёт большой ток, на протекание которого прибор может быть просто не рассчитан (рисунок 2.6).

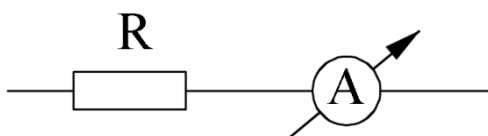


Рисунок 2.6 – Подключение амперметра

Вольтметр, наоборот, имеет большое электрическое сопротивление и подключается всегда параллельно к исследуемому участку электрической цепи (рисунок 2.7).

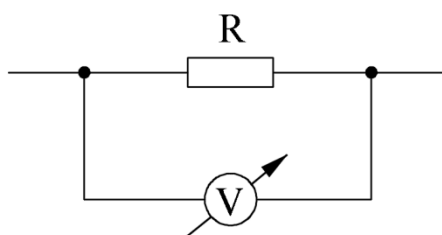


Рисунок 2.7 – Подключение вольтметра

Часто возникает необходимость иметь под рукой электроизмерительный прибор, рассчитанный на несколько диапазонов измерений. Возникает закономерный вопрос: как изменить предел измерения прибора? Для этого к амперметрам и вольтметрам определенным образом подключают так называемые шунты и добавочные сопротивления. Однако здесь возникает другая проблема: электроизмерительные приборы имеют внутреннее сопротивление, наличие которого означает, что подключение измерительных приборов к цепи окажет влияние на её параметры.

В этой ситуации наличие внутреннего сопротивления в амперметре приводит к тому, что общее сопротивление участка цепи становится больше и, соответственно, ток в цепи при наличии амперметра будет меньше силы тока при его отсутствии.

Меньшее внутреннее сопротивление амперметра приводит к уменьшению изменения силы тока на участке электрической цепи, к которой этот амперметр подключён. Следовательно, можно расширить пределы измерения тока и напряжения при помощи дополнительных резисторов, которые называют шунтами (для амперметров) и добавочных сопротивлений (для вольтметров).

Шунтированием называют подключение параллельно амперметру с внутренним сопротивлением  $R_A$  резистора  $R_{ш}$ , который называют шунтом.

Схема подключения шунта показана на рисунке 2.8. В данной ситуации часть тока  $I_{ш}$  протекает через шунт, а общий измеренный ток становится больше, чем предел измерения амперметра  $I$ . Такое подключение можно рассматривать как амперметр с изменённым пределом измерения, равным  $I$ .

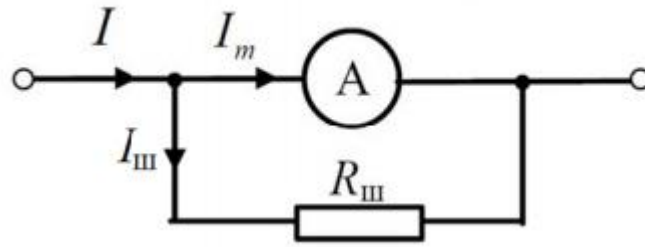


Рисунок 2.8 – Схема подключения шунта к амперметру

По первому правилу Кирхгоффа:

$$\begin{aligned} I &= I_m + I_{\text{ш}} \\ I_m I_A - I_{\text{ш}} R_{\text{ш}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решение данной системы уравнений будет иметь следующий вид:

$$I = I_m \left( 1 + \frac{R_A}{R_{\text{ш}}} \right). \quad (2.31)$$

Из полученного выражения следует, что чем меньше сопротивление шунта  $R_{\text{ш}}$ , тем выше будет новый предел измерения силы тока  $I$ . Таким образом, сопротивление шунта можно найти как:

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_A}{\frac{I}{I_m} - 1} = \frac{R_A}{n - 1}, \quad (2.32)$$

где  $n = \frac{I}{I_m}$  – так называемый коэффициент шунтирования.

Назначение вольтметра – измерять разность потенциалов на интересующем нас участке цепи. В случае однородного участка (сторонних сил нет) разность потенциалов равна напряжению на данном участке. Для корректной работы

вольтметра, чтобы токи в цепи сильно не изменялись, его сопротивление  $R_V$  должно быть достаточно большим. Последовательно подключение резисторов как раз приводит к увеличению сопротивления, следовательно, чтобы сделать сопротивление вольтметра ещё большим, необходимо последовательно к нему подключить добавочное сопротивление, как показано на рисунке.

Предел измерения вольтметра:

$$I_m = \frac{U_m}{R_V}. \quad (2.33)$$

Для того, чтобы изменить предел измерения вольтметра, последовательно с ним включают добавочное сопротивление  $R_D$ , тогда измеряемое напряжение  $U$  будет равно:

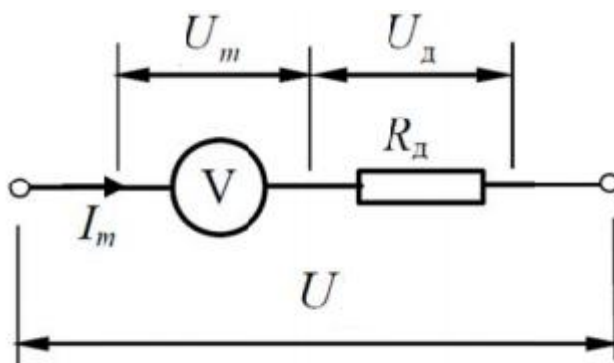


Рисунок 2.9 – Схема подключения добавочного сопротивления к вольтметру

$$U = U_m + U_D, \quad (2.34)$$

где  $U_D$  – напряжение на добавочном сопротивлении.

Так как вольтметр и добавочное сопротивление подключены последовательно, через них будет протекать один и тот же ток. Следовательно, напряжение на добавочном сопротивлении будет равно:

$$U_D = I_m R_D. \quad (2.35)$$

Измеряемое напряжение, соответственно, будет равно:

$$U = U_m + I_m R_D, \quad (2.36)$$

откуда добавочное сопротивление:

$$R_D = \frac{U - U_m}{I_m} = \frac{U - U_m}{U_m} R_V = \frac{U}{U_m} - 1 \quad R_V = m - 1 \quad R_V, \quad (2.37)$$

где  $m = \frac{U}{U_m}$  – коэффициент изменения предела измерения вольтметра.

Примеры решения задач.

**Задача 1.** Найти величину сопротивления шунта амперметра, предназначенного для расширения пределов измерения тока с 10 мА до 10 А. Внутреннее сопротивление амперметра равно 100 Ом.

Дано:

$$I_1 = 10 \text{ мА}$$

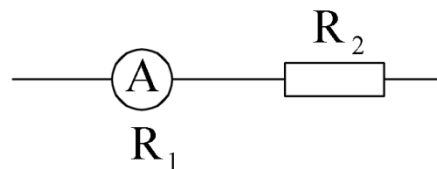
$$I = 10 \text{ А}$$

$$R_1 = 100 \text{ Ом}$$

Решение:

Сопротивление шунта амперметра ( $R_2$ ) подключается параллельно прибору.

Найти:



$$R_2 - ?$$

Ток, проходящий через сопротивление шунта, равен

$$I_2 = I - I_1$$

Из выражения:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

находим сопротивление шунта:

$$R_2 = \frac{I_1 R_1}{I_2} = \frac{I_1 R_1}{I - I_1}$$

Подстановка числовых данных даёт значение сопротивления шунта  $R_2 = 0,1$  Ом. То есть для расширения пределов измерения амперметра с 10 мА до 10 А параллельно данному амперметру необходимо установить шунт с сопротивлением величиной 0,1 Ом.

**Задача 2.** Найти добавочное сопротивление вольтметра для необходимого для расширения пределов измерения напряжения с 5 до 500 В. Внутреннее сопротивление вольтметра равно 200 Ом.

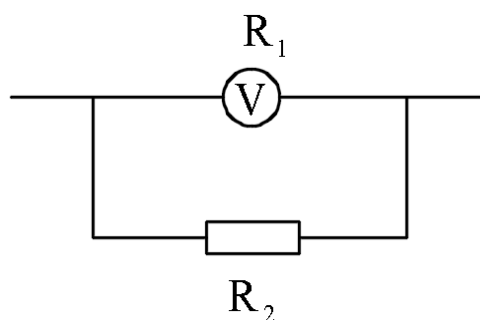
Дано:

Решение:

$$U_1 = 5 \text{ В}$$

$$U_2 = 500 \text{ В}$$

$$R_1 = 200 \text{ Ом}$$



Найти:

Максимально допустимый ток вольтметра определяется согласно выражению:

$$R_2 - ?$$

$$I = \frac{U_1}{R_1}$$



После подключения добавочного сопротивления  $R_2$  ток через вольтметр будет равен:

$$I = \frac{U_2}{R_1 + R_2}.$$

В результате получим следующую формулу

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_1 + R_2}.$$

Определяем добавочное сопротивление вольтметра

$$R_2 = \frac{U_2 - U_1}{U_1} R_1.$$

Подставив в полученное выражение числовые значения, получим добавочное сопротивление  $R_2 = 19800$  Ом.

Следовательно, для расширения пределов измерения вольтметра от 5 до 500 В необходимо установить добавочное сопротивление величиной 19800 Ом.

**Задача 3.** Чему равно сопротивление шунта, который нужен для того, чтобы амперметром на 1 А с сопротивлением 0,075 Ом можно было измерять ток 25 А.

Дано:

$$I = 25 \text{ А}$$

$$I_A = 1 \text{ А}$$

$$R_A = 0,075 \text{ Ом}$$

Решение:

Сначала определим коэффициент шунтирования

$$n = \frac{I}{I_A} = \frac{25}{1} = 25.$$

Найти:

Зная коэффициент шунтирования, находим сопротивление

$R_{\text{ш}} - ?$

шунта:

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_A}{n-1} = \frac{0,075}{24} = 0,003125 \text{ Ом.}$$

Необходимо отметить, что данное сопротивление необходимо подобрать очень точно, иначе при измерении возникнет большая ошибка.

Из данного примера видно, что шунт – это резистор, который обладает очень маленьким сопротивлением. Его обычно изготавливают в виде короткой пластинки большого сечения. Материал, из которого изготавливают шунт, должен иметь небольшой температурный коэффициент, чтобы его сопротивление практически не изменялось при нагревании.

Задания для самостоятельного решения.

1. Для расширения предела измерения амперметра в 50 раз с внутренним сопротивлением  $R_A = 0,5$  Ом требуется подключить шунт. Найдите сопротивление этого шунта, ток полного отклонения прибора и максимальное значение тока на расширенном пределе, если падение напряжения на шунте  $U_{\text{ш}} = 75$  мВ.

2. Амперметр с пределом измерения 100 А имеет наружный шунт сопротивлением  $R_{\text{ш}} = 0,001$  Ом. Определить сопротивление измерительной катушки прибора, если ток полного отклонения  $I_A = 25$  мА. Какова наибольшая потребляемая амперметром мощность?

3. Предел измерения вольтметра составляет 7,5 В при внутреннем сопротивлении  $R_V = 200$  Ом. Вычислить добавочное сопротивление, необходимое для расширения предела измерения вольтметра до 600 В.

## Глава 3 Введение в магнитные поля

### § 3.1 Магнитное поле

Из опыта известно, что заряженная частица создаёт электрическое поле  $E$ . А источником магнитного поля  $B$  является постоянный магнит. Магнитное поле можно продемонстрировать опытным путём, поместив компас рядом с магнитом и двигая его возле магнита. Можно заметить, как стрелка компаса выстраивается вдоль линии магнитных полей.

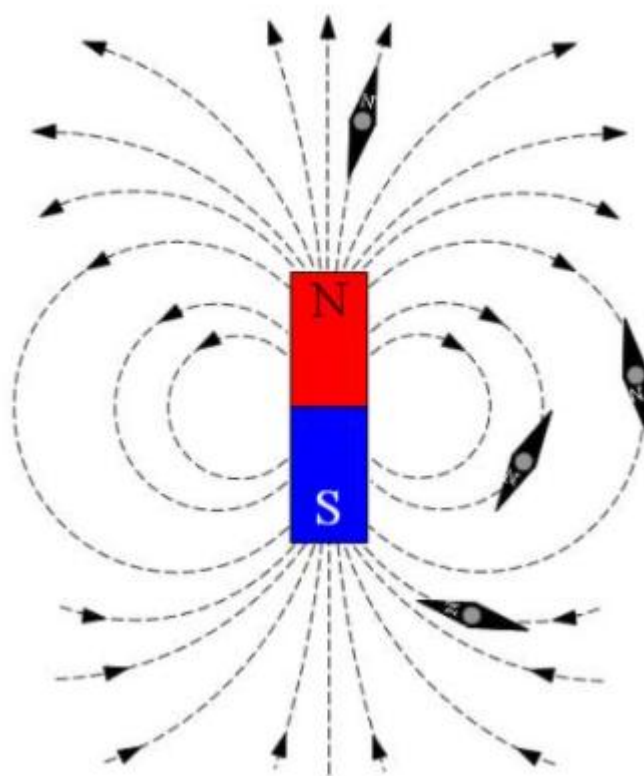


Рисунок 3.1 – Магнитное поле постоянного магнита

Постоянный магнит состоит из двух полюсов, которые обозначаются как южный (S) и северный (N). Опыт показывает, что чем ближе подносить полюса магнитов друг к другу, тем интенсивность магнитных полей увеличивается. Принято обозначать направление магнитного поля от северного полюса к южному полюсу. Опыт показывает, что если поднести два магнита близко друг к другу, то

одинаковые полюса будут отталкиваться друг от друга, а противоположные полюса притягиваться друг к другу (рисунок 3.2).

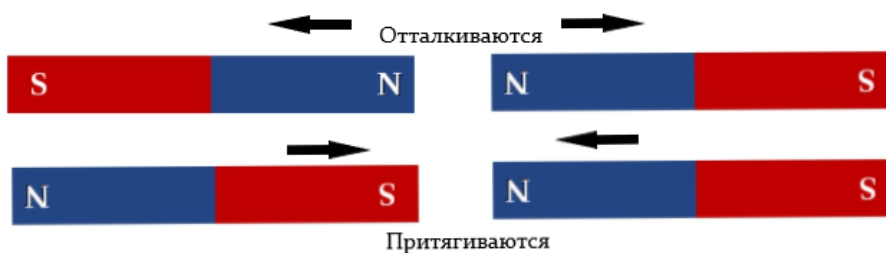


Рисунок 3.2 – Взаимодействие магнитных полюсов

В предыдущих главах показано, что источником электрического поля является неподвижный электрический заряд, а заряды разных знаков могут находиться изолировано друг от друга. Магнитные полюса не могут находиться по отдельности и всегда находятся в паре. Если разделить постоянный полосковый магнит, то получаются два новых магнита с двумя полюсами. Другими словами, магнитных зарядов (магнитных монополей) не существует.

Чтобы найти индукцию магнитного поля  $B$ , рассмотрим случай электрического поля  $E$ , это поле определяется как сила, приходящаяся на единицу заряда:

$$E = \frac{F}{q}. \quad (3.1)$$

Но как видно выше, в природе нет магнитных зарядов, поэтому магнитное поле  $B$  нужно искать другим путем.

### § 3.2 Сила Лоренца

Для определения магнитного поля в конкретной точке рассмотрим заряженную частицу  $q$ , которая движется со скоростью  $v$ . Эксперименты магнитному воздействию на заряды установили:

1. Модуль вектора магнитной силы  $F_B$ , действующей на заряженную частицу, прямопропорциональна скорости  $v$  и заряду  $q$ .
2. Модуль и направление силы  $F_B$  зависят от скорости и магнитной индукции поля  $B$ .
3. Сила  $F_B$  равна нулю, когда скорость  $v$  параллельна вектору магнитного поля  $B$ . Но если скорость частицы  $v$  имеет некоторый угол  $\theta$  по отношению к вектору  $B$ , то направление  $F_B$  перпендикулярно плоскости, образованной векторами  $v$  и  $B$ , и модуль вектора  $F_B$  прямо пропорционален  $\sin\theta$ .
4. Если изменить знак заряда на противоположный ( $q \rightarrow -q$ ), то сила также меняет направление на противоположное.

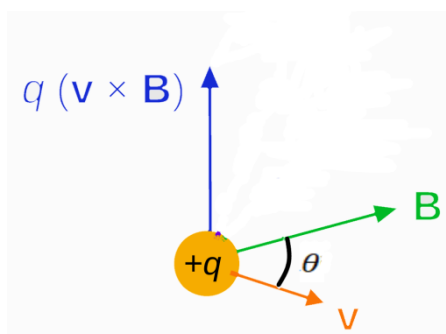


Рисунок 3.3 – Направление магнитной силы по отношению к скорости и магнитному полю

Все опытные факты можно привести в обобщённое уравнение для заряженной частицы, движущейся со скоростью  $v$ :

$$F_L = q v \times B , \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) принято называть силой Лоренца и использовать в качестве определения магнитного поля.

Векторное произведение в формуле (3.2) можно записать через  $\sin\theta$  между векторами  $v$  и  $B$

$$F = q v B \sin\theta. \quad (3.3)$$

Единицей измерения магнитного поля в системе СИ является тесла (Т):

$$1 \text{ Тесла} = 1\text{T} = \frac{1\text{Ньютон}}{\text{Кулон метр/секунда}} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{К}\cdot\text{м/с}} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}}.$$

Ещё одна система единиц используется для измерения магнитного поля, это гаусс (Г), где  $1 \text{ Т} = 10^4 \text{ Г}$ . Нужно отметить, что  $F_L$  всегда перпендикулярна векторам  $v$  и  $B$ . Это означает, что сила не может ускорить (замедлить) частицу, то есть не меняет модуль скорости вектора  $v$  (следовательно, кинетическая энергия не изменяется под действием силы Лоренца). Таким образом, сила Лоренца не совершает работы над заряженными частицами:

$$\begin{aligned} dA &= \text{Сила} \cdot \text{перемещение} = F_B ds = q v \times B \cdot v dt = \\ &= q v \times v \cdot B dt = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь использована формула для смешанного произведения векторов

$$A \times B \cdot C = C \times A \cdot B = B \times C \cdot A.$$

Векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю, как показано в уравнении (3.4). Но сила Лоренца способна изменить направление вектора скорости частицы.

### § 3.3 Магнитное поле вокруг проводника с током

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, со стороны магнитного поля действует сила Ампера  $F_A$ . Так как электрический ток состоит из огромного количества заряженных частиц, движущихся под действием электрического поля, поместив проводник с током в магнитное поле, на неё будет действовать магнитная сила, то есть сила Лоренца.

Для простоты рассмотрим прямолинейный проводник с током, помещённый в область однородного постоянного магнитного поля. Магнитное поле показано точками и направлено на нас (рисунок 3.4). Согласно формуле (3.2) можно показать, что если ток направлен вниз, то сила Лоренца, действующая на проводник с током, будет его отклонять влево, а если ток направлен вверх, то сила Лоренца будет отклонять проводник вправо, как показано на рисунке 3.4.

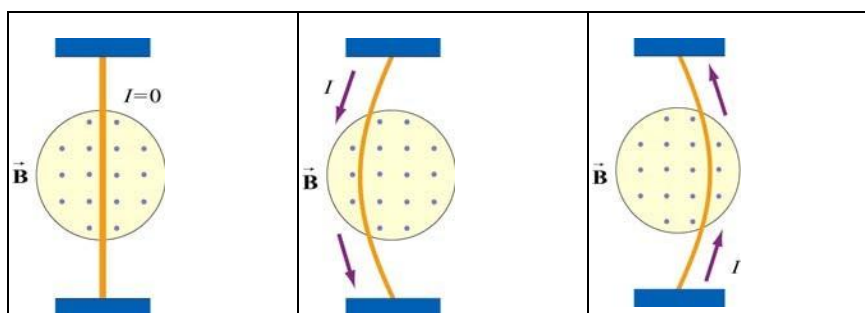


Рисунок 3.4 – Проводник с током в магнитном поле

Для численного расчёта силы Лоренца рассмотрим небольшой участок проволоки длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$ , как показано на рисунок 3.5. Магнитное поле направлено от нас и показано крестиками (x).

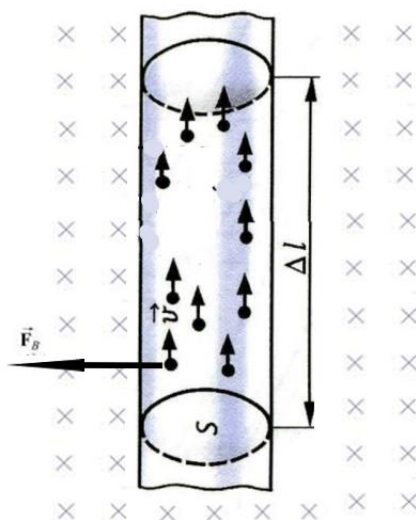


Рисунок 3.5 – Магнитная сила, действующая на проводник с током

Легко запомнить действие силы Лоренца, используя правило левой руки, как показано на рисунке 3.6. Ладонь левой руки располагается таким образом, чтобы вектор магнитного поля падал перпендикулярно ладони, а пальцы руки направлены вдоль тока, тогда большой палец показывает направление силы Лоренца.

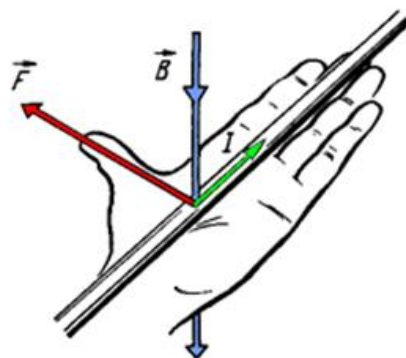


Рисунок 3.6 – Правило левой руки для определения направления силы Лоренца

Положительные заряды в проводнике движутся со средней дрейфовой скоростью  $v_d$  под действием электрического поля. Суммарный заряд в сегменте длиной  $l$  равен произведению объема, умноженного на концентрацию заряда



$q_{tot} = qnSl$ , где  $n$  – количество зарядов в единицу объёма. Таким образом, сила Лоренца, действующая на участок проводника в магнитном поле, равна

$$F_B = q_{tot}v_d \times B = qnSl v_d \times B = I l \times B , \quad (3.5)$$

где  $I = nqv_dS$ , а  $l$  представляет собой вектор длины  $l$  и направлен вдоль тока  $I$ .

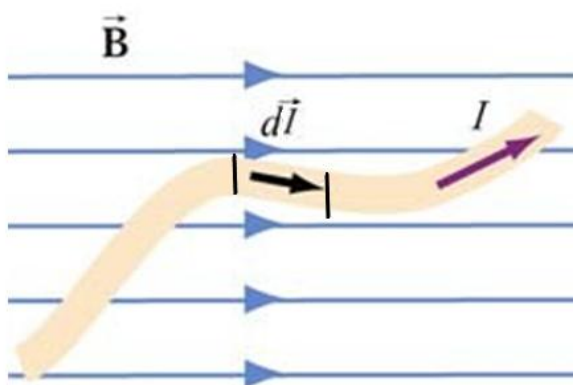


Рисунок 3.7 – Проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле

Найдём магнитную силу, действующую на изогнутый проводник произвольной формы в пространстве. Силу Лоренца можно получить путём суммирования сил, действующих на бесконечно малые сегменты, составляющие проволоку. Бесконечно малый сегмент – это дифференциальный сегмент, который обозначается как  $dl$  (рисунок 3.7).

Магнитная сила, действующая на малый сегмент  $dl$ , равна векторному произведению сегмента  $dl$  на магнитное поле  $B$

$$dF_B = I dl \times B . \quad (3.6)$$

Таким образом, суммарная сила равна

$$F_B = I \int_a^b dl \times B, \quad (3.7)$$

где  $a$  и  $b$  обозначают начало и конец проводника.

Суммируя бесконечно малые отрезки в интеграле, получим вектор длины  $l$ , как показано на рисунке 3.8.

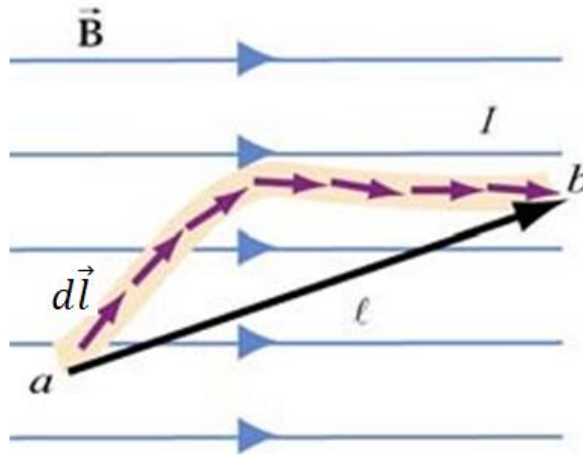


Рисунок 3.8 – Произвольный изогнутый проводник с током в магнитном поле

Используя уравнение (3.7), получим окончательно суммарную магнитную силу, действующую на проводник с током

$$F_B = I \int_a^b ds \times B = I(l \times B), \quad (3.8)$$

где  $l$  – вектор длины, направленный от начала  $a$  к концу  $b$ .

Замечание: если проводник с током замкнут в виде петли (рисунок 3.9), то сила Лоренца для замкнутой петли равна нулю.

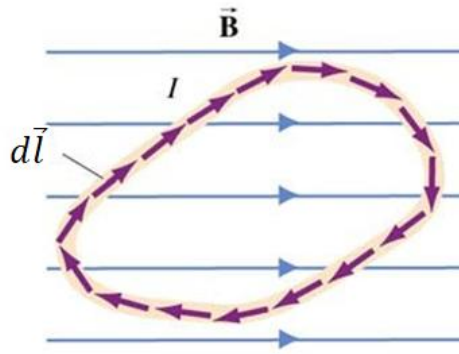


Рисунок 3.9 – Проводник в виде петли с током  $I$  в однородном магнитном поле

Доказательство сводится к простому сложению векторов. Поскольку сумма бесконечно малых векторов длины  $dl$  образует замкнутый многоугольник, то и их векторная сумма равна нулю, т.е.  $\oint dl = 0$ . Суммарная магнитная сила для петли  $F_B = 0$ .

### Пример 3.1: магнитная сила, действующая на полукруглую петлю

Рассмотрим замкнутый полукруглый контур, лежащий в плоскости  $XU$  и несущий ток  $I$  в направлении против часовой стрелки, как показано на рисунке 3.10

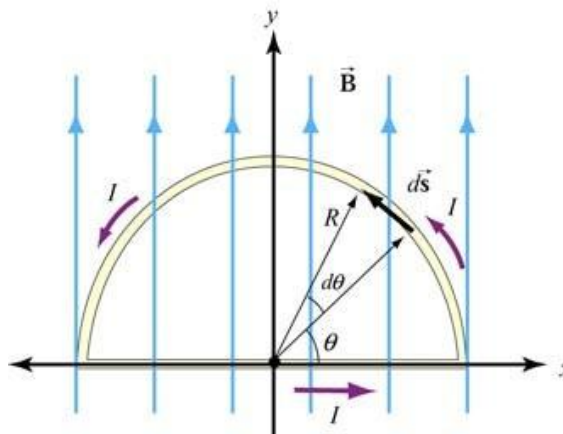


Рисунок 3.10 – Полукруглая петля, с током  $I$

Равномерное магнитное поле действует в направлении  $+Y$ . Найдите магнитную силу, действующую на прямой отрезок и полукруглую дугу.

Решение:

$B = B_j$ ,  $F_1$  и  $F_2$  силы, действующие на прямой отрезок и полукруглые части соответственно. Используя уравнения (3.7) и отмечая, что длина прямого отрезка равна  $2R$ , получим магнитную силу, равную

$$F_1 = I 2R i \times B_j = 2IRBk,$$

где  $k$  – ортонормированный вектор, направленный перпендикулярно поверхности  $XY$ . Чтобы оценить  $F_2$ , сначала отметим, что дифференциальный элемент длины  $ds$  на полукруге можно записать как

$$ds = R d\theta = R d\theta (-\sin\theta i + \cos\theta j).$$

Сила, действующая на элемент длины полуокружности  $\pi R$

$$dF_2 = I ds \times B = IR d\theta (-\sin\theta i + \cos\theta j) \times B_j = -IBR \sin\theta d\theta k.$$

Мы видим, что сила  $dF_2$  направлена вдоль вектора  $k$ . Интегрирую по всей дуге полукруга, получим

$$dF_2 = -IBRk \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = -2IBRk$$

Суммарная сила, действующая на полукруглую проволоку, равна нулю

$$F_{tot} = F_1 + F_2 = 0.$$

Данный вывод полностью совпадает с предыдущим утверждением о суммарной силе, действующей на замкнутую петлю в однородном магнитном поле, которая равна нулю.

### § 3.4 Момент силы, действующий на прямоугольный контур в магнитном поле

Рассмотрим прямоугольную петлю с током  $I$  в плоскости  $XU$ , находящемся в однородном магнитном  $B$  поле, которое находится в плоскости  $XU$  направлено вдоль оси  $X$ , как показано на рисунке 3.11.

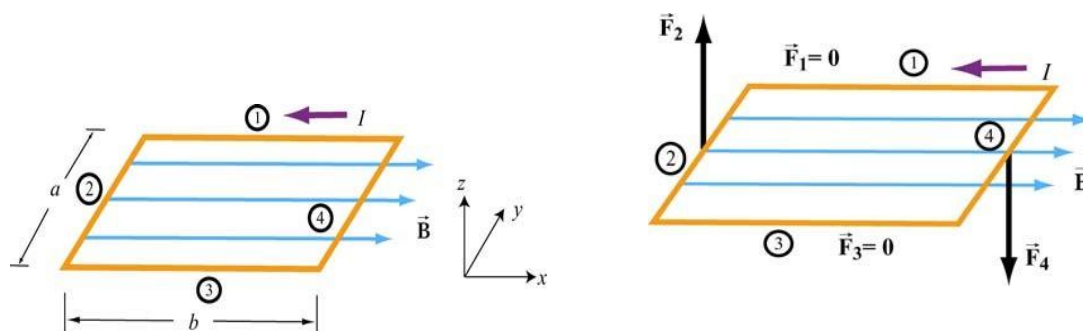


Рисунок 3.11 – а) Прямоугольный контур в однородном магнитном поле; б) Силы, действующие на стороны 2 и 4, прямо противоположны

Из уравнения (3.7) следует, что силы Лоренца, действующие на стороны 1 и 3, равны нулю, потому что векторы длины параллельны вектору магнитного поля  $B$  (их векторные произведения равны нулю). А силы со стороны магнитного поля, действующие на сегменты 2 и 4, не равны нулю, так как вектор длины перпендикулярно магнитному полю:

$$\begin{aligned} F_2 &= I \vec{a}_j \times B \vec{i} = (-j \times i) IaB \\ F_4 &= I \vec{a}_j \times B \vec{i} = (j \times i) IaB \end{aligned} \quad (3.9)$$

сила  $F_2$  перпендикулярно плоскости XY и направлена в + Z, а  $F_4$  – направлена в – Z. Тогда суммарная сила, действующая на прямоугольный контур, равна нулю

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 0 \quad (3.10)$$

Даже если суммарная сила равна нулю, силы  $F_2$  и  $F_4$  создают крутящий момент, который заставляет контур с током вращаться относительно оси OY (рисунок 3.12).

Вычислим механический крутящий момент относительно центра контура.

$$M = -\frac{b}{2}i \times F_2 + \frac{b}{2}i \times F_4 = \frac{1}{2} (-bi \times IaBk + bi \times -IaBk) = \frac{1}{2} IabB + IabB \quad j = j I B a b = j I B S. \quad (3.11)$$

Так как плечо – векторная величина, которая направлена вдоль оси Y, а силы  $F_2$  и  $F_4$  направлены вдоль оси Z и прямо противоположны, то, учитывая векторное произведение,  $i \times k = j$ . Имея в виду, что если вращение идёт по часовой стрелке вокруг оси OY, то знак момента силы является положительным.

Для удобства введём вектор площади, который численно равен площади и направлен перпендикулярно поверхности контура  $S = abn$ , где  $n$  – единичный вектор перпендикулярный плоскости контура. Считается, что величина вектора площади положительна, если оно удовлетворяет правилу буравчика или винта. Тогда уравнение (3.11) для крутящего момента легко записать уравнение в виде:

$$M = I S \times B . \quad (3.12)$$

Когда угол между вектором площади  $S$  и вектором магнитного поля  $B$  составляет 90 градусов (перпендикулярно), то крутящий момент достигает максимума.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда петля (или вектор площади  $S$ ) составляет угол  $\theta$  по отношению к магнитному полю.

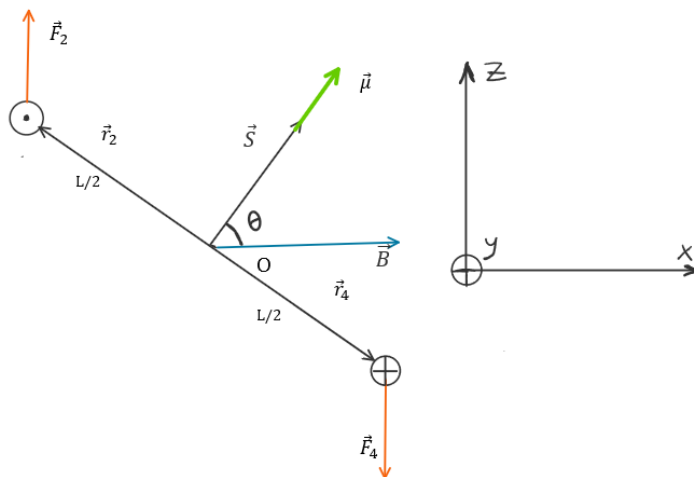


Рисунок 3.12 – Вращение прямоугольного контура тока вокруг оси

Из рисунка 3.12 видно, что рычаги могут быть выражены следующим образом

$$r_2 = \frac{b}{2} - \sin \theta \cdot i + \cos \theta k = -r_4 \quad (3.13)$$

и полный крутящий момент равен

$$M = r_2 \times F_2 + r_4 \times F_4 = 2r_2 \times F_2 = 2 \frac{b}{2} - \sin \theta \cdot i + \cos \theta k = \quad (3.14)$$

$$IabB \sin \theta j = IS \times B.$$

Если контур состоит из  $N$  витков, то величина момента равна

$$M = NISB\sin\theta. \quad (3.15)$$

Величина  $NIS$  называется магнитным дипольным моментом  $\mu$

$$\mu = NIS. \quad (3.16)$$

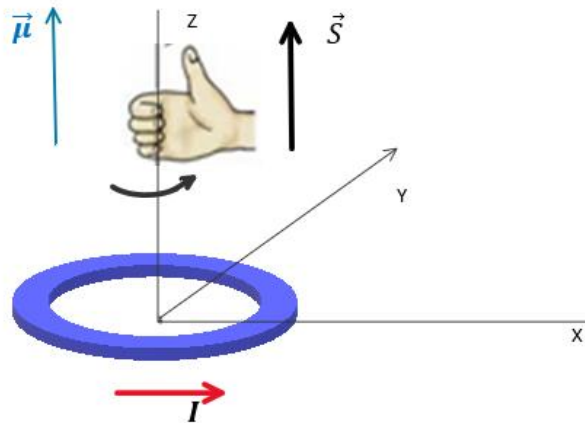


Рисунок 3.13 – Правило правой руки для определения направления магнитной силы, действующей на диполь

Направление вектора  $\mu$  совпадает с вектором площади  $S$  (перпендикулярно плоскости петли) и определяется правилом правой руки, как показано на рисунке 3.13. Единицей измерения дипольного момента в системе СИ является амперметр<sup>2</sup>(А·м<sup>2</sup>). Можно переписать формулу (3.12), воспользовавшись выражением для дипольного момента  $\mu$ , тогда получим формулу для крутящего момента

$$M = \mu \times B. \quad (3.17)$$

Данное уравнение аналогично уравнению (1.69) для момента сил электрического дипольного момента  $p$ , находящегося в электрическом поле  $E$ . Используя аналогию между электрическим полем и магнитным полем, рассмотрим



потенциальную энергию диполя, находящегося в электрическом поле. Она равна  $W = -p \cdot E$ , аналогичная форма будет и для магнитного диполя.

Работа внешнего магнитного поля по вращению магнитного диполя определяется ориентацией диполя, то есть зависит от поворота на угол  $\theta$ . Механическую формулу по определению работы момента сил на некоторый угол через интеграл можно задать следующим образом:

$$W = \int_{\theta^0}^{\theta} M \sin \theta \, d\theta. \quad (3.18)$$

Подставляя в неё  $M \sin \theta = \mu B \sin \theta$ , получим выполняемую магнитным полем работу, равную убыли потенциальной энергии. Так как начальную ориентацию, как и нулевую потенциальную энергию, можно выбирать произвольно, то задав  $W_0 = 0$  при  $\theta^0 = \pi/2$ , получим потенциальную энергию для магнитного диполя в присутствии внешнего магнитного поля:

$$W = -\mu B \cos \theta = -\mu \cdot B. \quad (3.19)$$

Заметим, что произведение векторов  $\mu$  и  $B$  скалярное. Тогда равновесной или устойчивой конфигурация будет, тогда когда  $\mu$  сонаправлены и параллельны вектору  $B$ , при этом минимум потенциальной энергии  $W = -\mu B$ . В другом случае, когда векторы  $\mu$  и  $B$  антипараллельны друг другу, потенциальная энергия достигает максимума  $W_{max} = +\mu B$ , но такая конфигурация неустойчива. На этом принципе основаны все электродвигатели.

### § 3.5 Магнитная сила, действующая на диполь во внешнем поле

Выше было показано, что для прямоугольного контура с током, находящегося в однородном магнитном поле, суммарная сила, действующая на контур, равна

нулю. Но в общем случае при помещении контура с током в неоднородное магнитное поле, на этот контур будет действовать ненулевая сила.

Рассмотрим ситуацию, когда вдоль симметричной оси стержневого магнита расположен небольшой диполь  $\mu$ , как показано на рисунке 3.14

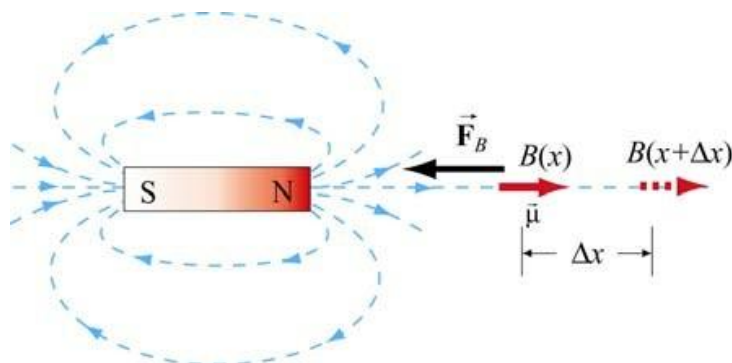


Рисунок 3.14 – Диполь около неоднородного магнитного поля.

Со стороны стержневого магнита, магнитное поле которого неоднородно в пространстве, диполь испытывает силу притяжения. Таким образом, для перемещения диполя вправо на расстояние  $\Delta x$  необходимо приложить внешнюю силу  $F_{\text{вн}}$ .

$$W_{\text{вн}} = F_{\text{вн}} \Delta x = \Delta U = -\mu B(x + \Delta x) + \mu B(x) = -\mu B(x + \Delta x) + \mu B(x) . \quad (3.20)$$

Устремив  $\Delta x$  к нулю и разделив обе части уравнения на  $\Delta x$ , получим величину внешней силы со стороны неоднородного магнитного поля:

$$F_{\text{вн}} = -\mu \frac{dB}{dx} . \quad (3.21)$$

Из рисунка видно, что градиент магнитного поля  $\frac{dB}{dx} < 0$  отрицателен, так как интенсивность магнитного поля уменьшается с расстоянием, а сила является положительной величиной. Внешняя сила необходима для преодоления силы

притяжения, обусловленной неоднородным магнитным полем. Таким образом, мы получаем для силы

$$F_B = \mu \frac{dB}{dx} = \frac{d(\mu \cdot B)}{dx}. \quad (3.22)$$

Формулу (3.22) можно получить непосредственно из определения силы – это минус градиент потенциальной энергии

$$F_B = -\nabla U, \quad (3.23)$$

так как потенциальная энергия магнитного диполя во внешнем поле равна  $U = -\mu B$ , подставляя это выражение в (3.23), получим магнитную силу, испытываемую диполем  $\mu$ , помещённым в неоднородное магнитное поле  $B$ :

$$F_B = \nabla(\mu \cdot B), \quad (3.24)$$

где  $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$  – оператор градиента или оператор набла.

### § 3.6 Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле

Рассмотрим заряженную частицу, движущуюся в однородном магнитном поле  $B$ , с начальной скоростью  $v$  перпендикулярно магнитному полю, как показано на рисунке 3.6. Пусть заряд равен  $+q$ , а направление поля  $B$  перпендикулярно поверхности страницы и уходит от нас. В такой постановке задачи роль центростремительной силы будет выполнять сила Лоренца  $F$ , действующая на

заряженную частицу. Как выяснится далее из анализа динамики движения, частица будет двигаться по круговой траектории, как показано на рисунке 3.15.

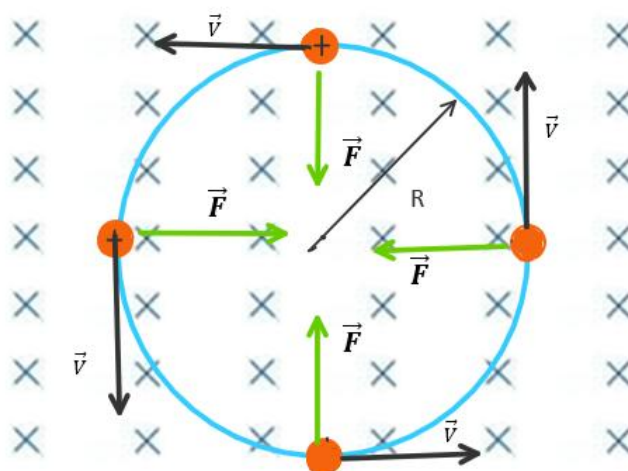


Рисунок 3.15 – Траектория заряженной частицы, движущейся в однородном поле  $B$  со скоростью  $v$  перпендикулярно  $B$

Заряженная частица массой  $m$  движется по окружности радиуса  $r$  с постоянной скоростью  $v$ . На такую частицу действует центробежная сила  $F = mv^2 / r$ , которая всегда направлена к центру и перпендикулярна скорости частицы. Сила Лоренца  $F_B$  всегда действует в направлении, перпендикулярном скорости  $v$  заряженной частицы и магнитному полю  $B$ . Сила  $F_B$  не изменяет значение скорости частицы, то есть не совершает работу, но меняет направление вектора скорости  $v$ . Из соотношения равенства сил

$$qvB = \frac{mv^2}{r}. \quad (3.25)$$

Отсюда можно найти радиус траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле:

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (3.26)$$

Период  $T$  (время, необходимое для одного полного оборота) задается через

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3.27)$$

Аналогично, угловая скорость (циклотронная частота)  $\omega$  частицы:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m}. \quad (3.28)$$

Рассмотрим в качестве задачи движение заряда в однородном магнитном поле, если начальная скорость заряженной частицы имеет составляющую, параллельную магнитному полю  $B$ . Направление поля выберем за ось  $Z$ .

Решение:

Уравнение движение легко записать в виде

$$\frac{dp}{dt} = q \mathbf{v}, B,$$

где  $p = mv$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q}{m} \cdot \mathbf{v}, B.$$

Векторное произведение

$$\mathbf{v}, B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix}.$$

Тогда для каждой компоненты скоростей

$$\begin{aligned}v_x &= \omega v_y \\v_y &= -\omega v_x. \\v_z &= 0\end{aligned}$$

Систему дифференциальных уравнений легче решить, если воспользоваться методом умножения второго уравнения на мнимую единицу  $i$  и сложить между собой. Тогда получим следующий простой вид уравнения:

$$\frac{d}{dt} v_x + i v_y = -i\omega v_x + i v_y .$$

Решая данное простое дифференциальное уравнение, найдём:

$$v_x + i v_y = a e^{-i\omega t},$$

где  $a = v_0 e^{-i\omega t}$ ,  $v_0$  – начальная скорость частицы.

$$\begin{aligned}v_x &= v_0 \cos \omega t + \alpha \\v_y &= -v_0 \sin \omega t + \alpha .\end{aligned}$$

Интегрируя ещё раз, получим для координат частиц:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + r \sin \omega t + \alpha \\y &= y_0 + r \cos \omega t + \alpha ,\end{aligned}$$

где радиус траектории частицы равен

$$r = \frac{v_0}{\omega}.$$

Из третьего уравнения находим координату движения частицы по оси  $z$ :

$$z = z_0 + v_0 t.$$

Из этих уравнений видно, что полученная траектория будет представлять собой винтовую траекторию, как показано на рис. 3.16:

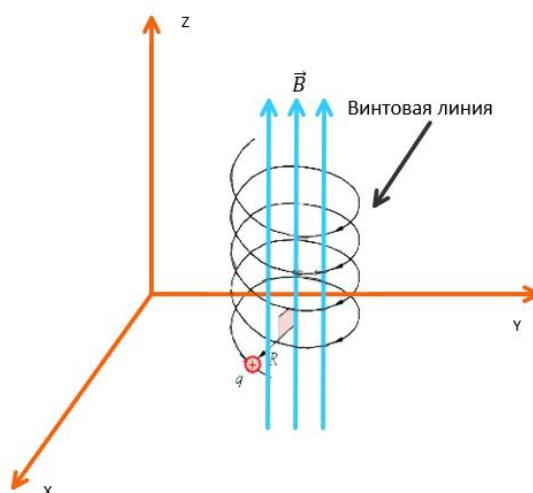


Рисунок 3.16 – Винтовая траектория заряженной частицы во внешнем магнитном поле. Скорость частицы имеет ненулевую составляющую вдоль направления магнитного поля  $B$

### § 3.7 Приложения

Явления, связанные с движением заряженных частиц в магнитных и электрических полях, нашли множество применений, в частности, в ускорительной технике, в медицине и в ядерных технологиях.

Суммарная сила, действующая на заряженную частицу со стороны электрического поля  $E$  и магнитного поля  $B$ , равна

$$F = q E + v \times B . \quad (3.29)$$

Эту силу также называют силой Лоренца. Комбинируя эти два поля, можно создать фильтр или селектор для заряженных частиц, движущихся с определенной скоростью. Этот принцип был использован Дж. Томсоном для измерения отношения заряда к массе электронов. На рисунке 3.17 приведена принципиальная схема аппарата Томсона.

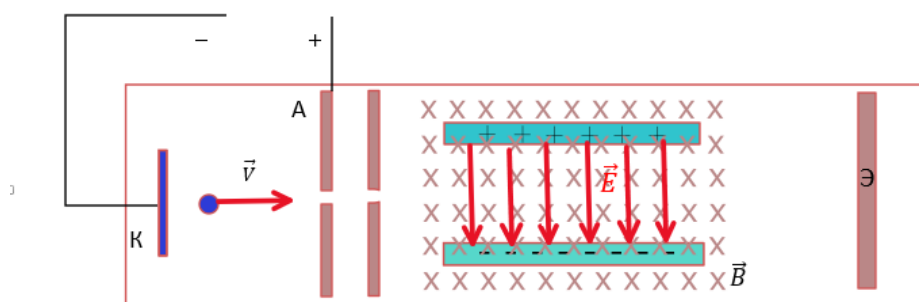


Рисунок 3.17 – Аппарат Томсона

Электроны с зарядом  $e$  и массой  $m$  испускаются из катода  $K$  и затем ускоряются в направлении щели  $A$  (анод). Пусть разность потенциалов между  $A$  и  $K$  равна  $\Delta V$ . Работа внешних сил равна изменению потенциальной энергии по разгону электронов:  $\Delta U = e\Delta V$ . Вся потенциальная энергия идёт на разгон электронов. Тогда, по закону сохранения энергии, кинетическая энергия, полученная электроном, равна разности потенциалов  $\Delta E_k = \Delta U = mv^2/2$ . Таким образом, скорость электронов задаётся следующей формулой:

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}}. \quad (3.30)$$

В схеме аппарата есть область с плоским конденсатором, которая создаёт однородное электрическое поле, направленное вниз. Тогда электроны будут отклоняться вверх под действием этого поля. Прибавим к электрическому полю магнитное поле, которое направлено перпендикулярно поверхности страницы, тогда электроны будут испытывать дополнительную магнитную силу  $-qv \times B$ . Если сила Лоренца точно уравновешивается силой со стороны электрического поля, то



электроны движутся по прямой траектории. Из уравнения (3.29) найдём скорость, при которой две силы уравниваются

$$v = \frac{E}{B}. \quad (3.31)$$

Другими словами, только те частицы, у которых скорость равна  $v = E/B$ , смогут двигаться по прямой. Объединив эти два уравнения, получим

$$\frac{e}{m} = \frac{E^2}{2(\Delta V)B^2}. \quad (3.32)$$

Путем измерения  $E$ ,  $\Delta V$  и  $B$ , можно легко определить отношение заряда к массе. Самое точное измерение на сегодняшний день  $e/m = 1.758820174 \cdot 10^{11}$  Кл/кг.

**Масс-спектрометр** – один из точнейших приборов для изучения и идентификации веществ, его можно использовать для измерения массы атома. В нём используют скрещённые электрические и магнитные поля. Устройство масс-спектрометра схематично показано на рисунке 3.18. Частица с зарядом  $+q$  сначала проходит область фильтрации скорости и далее перемещается в область магнитного поля.

В секторе для селекции скорости заряженных частиц, скрещенные электрические и магнитные поля удовлетворяют соотношению  $E = vB$  так, что траектория частицы представляет собой прямую линию. После селекции заряженная частица входит в область, где действует второе магнитное поле  $B_0$ , направленное перпендикулярно странице в сторону к нам.

Под действием этого поля частица будет двигаться по круговой траектории с радиусом  $r$  и в итоге ударится о фотопластинку. Легко найти радиус траектории заряженной частицы, используя формулу (3.30):

$$r = \frac{mv}{qB_0}, \quad (3.33)$$

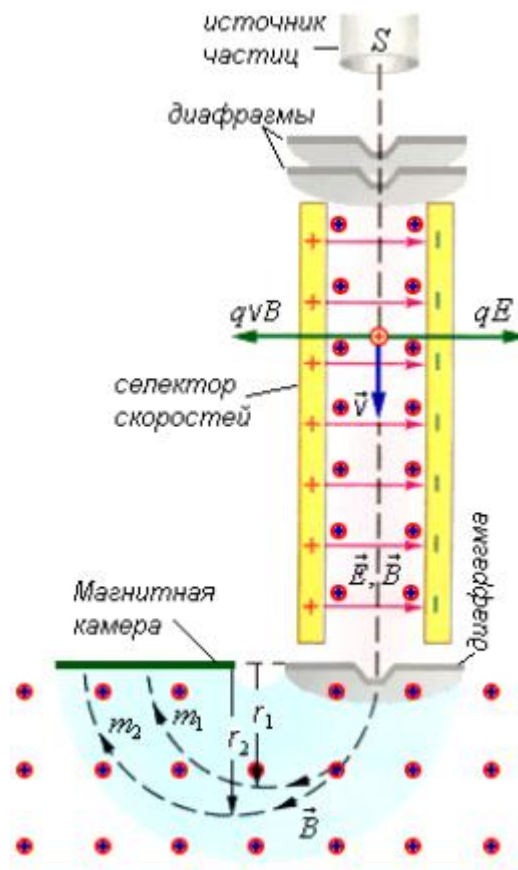


Рисунок 3.18 – Схема масс-спектрометра

Так как  $v = E / B$ , то массу частицы можно записать как

$$m = \frac{qB_0 r}{v} = \frac{qB_0 B r^2}{E}. \quad (3.76)$$

### § 3.8 Советы по решению задач

В предыдущем параграфе мы показали, что при наличии двух полей, как магнитного поля  $\vec{B}$ , так и электрического поля  $\vec{E}$ , суммарная сила, действующая на движущуюся частицу с зарядом  $q$ , равна  $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ , где  $\vec{v}$  – это скорость частицы. Направление  $\vec{F}_B$  определяется согласно векторному произведению  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  или по правилу правой руки. В декартовых координатах

единичными векторами являются ортонормированные вектора  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , которые удовлетворяют следующим свойствам:

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Для запоминания таких формул легче воспользоваться мнемоническим правилом

$$\begin{array}{c} \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \end{array}$$

Для запоминания умножения удобно пользоваться правилом циклической перестановки. Схематично рисуется треугольник, в вершинах которого изображены базисные вектора, обход такого треугольника можно производить, начиная с любой вершины. Если обход совершается по часовой стрелке, то произведение вектора, с которого начинается обход, на вектор, следующий за ним, равно третьему вектору.

Для векторов  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}$  и  $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$  векторное произведение получается следующим образом:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = v_y B_z - v_z B_y \mathbf{i} + v_z B_x - v_x B_z \mathbf{j} + (v_x B_y - v_y B_x) \mathbf{k}.$$

Если присутствует только магнитное поле, и  $\mathbf{v}$  перпендикулярно  $\mathbf{B}$ , то траектория представляет собой окружность с радиусом  $r = mv / qB$  и угловой скоростью  $\omega = qB / m$ .

Решение задач

### Задача 1. Подвижный стержень

Сплошной проводящий стержень массой  $m$  и радиусом  $R$  катится без скольжения по проводящим ток параллельным рельсам, разделённым расстоянием  $l$ , как показано на рисунке 3.19. Длина рельсов равна  $l$ . Через стержень течёт ток  $I$ , а

перпендикулярно странице включено однородное магнитное поле  $B$ , направленное от нас. Если стержень изначально находится в состоянии покоя, какова его скорость, когда он покидает рельсы?

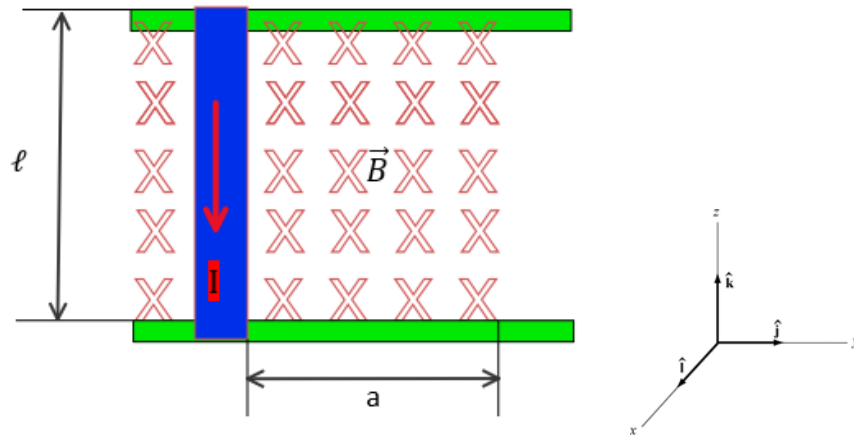


Рисунок 3.19 – Катящийся стержень в однородном магнитном поле

Решение:

Сила Ампера, действующая на стержень, задаётся формулой:  $F_A = Il \times B = li \times -Bk = lBj$ .

Работа, выполняемая магнитным полем по перемещению стержня, когда он движется через эту область, равна  $A = F_A \cdot ds = F \cdot a = l(B) a$ .

Согласно теореме о работе, работа затрачивается на изменение кинетической энергии, где задействованы как перемещение стержня, так и прокатка стержня вокруг оси:  $\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ .

Так как момент инерции стержня задаётся как  $I = mR^2/2$ , а условие качения со скольжением подразумевает  $\omega = v/R$ , то имеем:  $lBa = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$ .

Таким образом, скорость стержня, когда он покидает рельсы, равна  $v =$

$$\sqrt{\frac{4lBa}{3m}}$$

**Задача 2.** Стержень, подвешенный в магнитном поле

Проводящий стержень, имеющий массу  $m$ , подвешен на двух гибких не имеющих массы проводах в однородном магнитном поле, направленном на нас, как показано на рисунке 3.20. Сила тока в проводе равна  $I$ . Длина проводящего стержня равна  $l$ , а длина проводов равна  $a$ . Найти период малых колебаний тонкого стержня в магнитном поле.

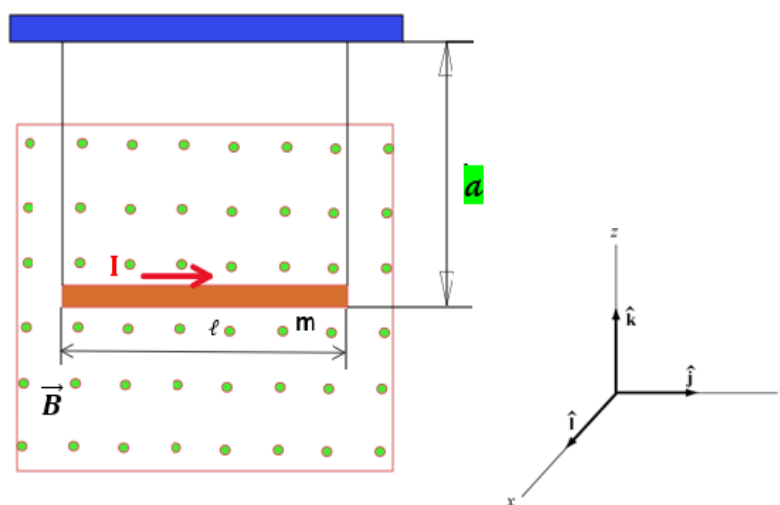


Рисунок 3.20 – Проводящий тонкий стержень в однородном магнитном поле

Решение:

Сила Ампера, действующая на проводник,  $F_A = Il \times B$ , направлена вертикально вниз, т.е. в сторону  $-z$ . Её можно представить в виде эффективного гравитационного поля с ускорением  $g^*$

$$F = -mg^*k.$$

Для силы  $F_A$ , направленной в сторону  $-z$ , направление тока должно быть слева направо  $l = lj$ .

$$F_A = Il \times B = I lj \times Bl = IlB j \times i = -IlBk.$$

Тогда для нахождения периода колебаний необходимо найти величину эффективного ускорения  $g^*$  и подставить её в формулу для периода математического маятника. Из равенства сил  $IlB = mg^*$ , найдём эффективное поле  $g^*$ , отсюда

$$g^* = \frac{IlB}{m}.$$

Тогда для периода колебания стержня в однородном магнитном поле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g^*}} = 2\pi \sqrt{\frac{ma}{IlB}}.$$

### Задача 3. Заряженные частицы в магнитном поле

В однородном электрическом поле ускоряются две частицы: одна с зарядом  $q$  массой  $m_a$ , другая с зарядом  $3q$  массой  $m_b$ . Разность потенциалов равна  $\Delta V$ . Затем частицы влетают в область однородного магнитного поля и движутся по круговым траекториям радиусами  $R$  и  $3R$  соответственно. Направление магнитного поля перпендикулярно скорости частицы. Каково их массовое соотношение?

Решение:

Кинетическая энергия, при разгоне равна

$$\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V.$$

Тогда скорость равна

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}}.$$

Так как заряды движутся по полуокружностям, то магнитная сила направлена радиально внутрь и является центростремительной силой:  $\frac{mv^2}{r} = qvB$ .

Радиус окружности легко получить:  $r = \frac{mv}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m\Delta V}{q}}$ .

Видно, что радиус окружности  $r$  пропорционально отношению массы к заряду в степени как одна вторая  $(m/q)^{1/2}$ .

$$\frac{r_a}{r_b} = \sqrt{\frac{m_a/q_a}{m_b/q_b}}$$

Тогда отношение масс равно  $\frac{m_a}{m_b} = \frac{q_a}{q_b} \left(\frac{r_a}{r_b}\right)^2 = \frac{1}{27}$ .

### Задача 3. Стержневой магнит в неоднородном магнитном поле

Стержневой магнит северным полюсом вверх помещён вдоль симметричной оси ниже горизонтального проводящего кольца с током  $I$ , как показано на рисунке 3.21. Угол между вертикалью кольца и магнитным полем в точке расположения кольца образует угол  $\theta$ . Найти силу, действующую на кольцо с током.

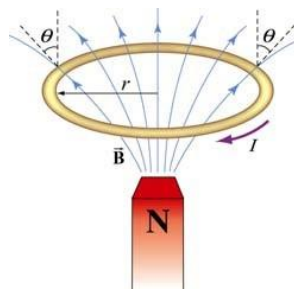


Рисунок 3.21 – Магнит, приближающийся к проводящему кольцу

Решение:

На малый дифференциальный элемент  $Idl$  на кольце действует магнитная сила  $dF_B = Idl \times B$ , где  $B$  – создаваемое магнитом поле. Далее будет удобнее перейти в цилиндрические координаты  $(r, \varphi, z)$ , как показано на рисунке 3.21, тогда для магнитной силы  $dF_B = I(-dl\varphi) \times (B\sin\theta r + B\cos\theta z) = IBdl \sin\theta z - IBdl \cos\theta r$ . Кольцо обладает осевой симметрией, сила вдоль радиуса будет нулевой, останется только  $z$ -компонента.

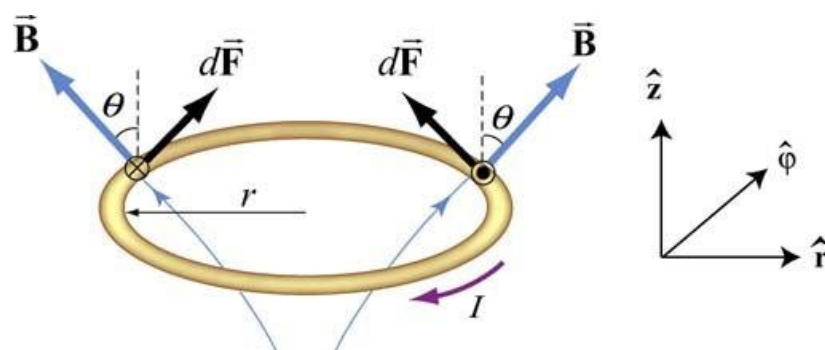


Рисунок 3.22 – Магнитная сила, действующая на кольцо с током

После интегрирования получим суммарную силу, действующую на кольцо:  $F_B = IB \sin\theta z \quad dl = 2\pi r IB \sin\theta z$ .

Из рисунка видно, что сила приложена в направлении  $+z$ , поэтому является отталкивающей силой.

### Вопросы для самопроверки

1. По какой траектории должна двигаться заряженная частица в однородном магнитном поле, если при этом она не испытывает действия силы со стороны поля?
2. Как магнитное поле влияет на движение заряженных частиц? Совершает ли работу при этом магнитное поле?
3. Заряженная частица движется под действием электрического и магнитного поля. В чем различие во влиянии этих полей на движение частицы?
4. Что такое магнитный диполь? Однородное или неоднородное магнитное поле может оказывать силу на диполь? Эта сила является отталкивающей или притягивающей?

### § 3.9 Задачи для самостоятельного решения

#### Задача 1. Электроны в телевизионной трубке



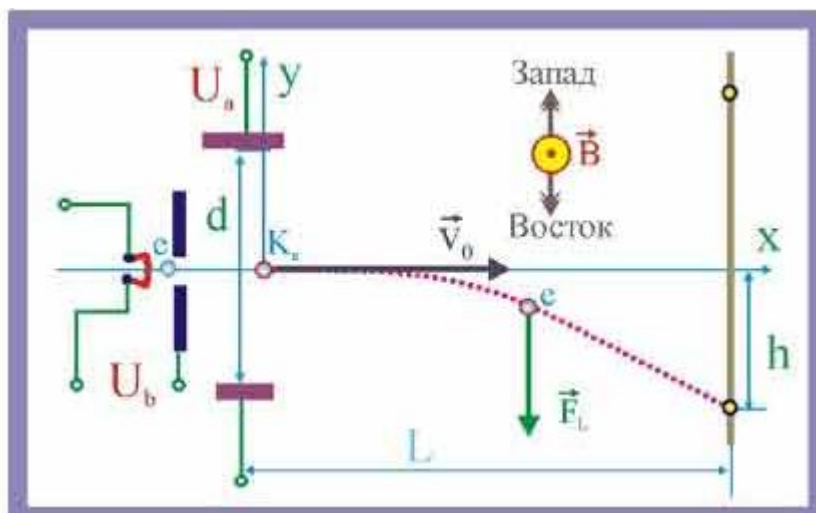


Рисунок 3.23 – принципиальная схема электронной трубки

Электроны в пучке телевизионной трубки имеют энергию 12 кэВ ( $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ ). Трубка ориентирована так, что электроны движутся горизонтально с юга на север. Длина трубки  $L$  составляет 0,20 м. Магнитное поле направлено на нас и имеет магнитуду  $B = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Т}$ . Найти: а) ускорение электрона, связанное с отклонением под действием силы Лоренца. б) расстояние отклонения луча при перемещении электронов через телевизионную трубку.

**Задача 2.** Магнитная сила на квадратном контуре с током

Контур в виде квадрата из проволоки массой 50 г и рёбрами длиной  $l = 0,1 \text{ м}$  закреплён на подвижной оси  $AA'$ , которая соответствует горизонтальной стороне квадрата, как показано на рисунке 3.24. Индукция магнитного поля однородна, составляет 500 Гаусс, направлена вертикально вниз. Контур имеет ток  $I$  так, что он находится в равновесии под действием силы тяжести при угле  $\theta = 20^\circ$ . Найти:

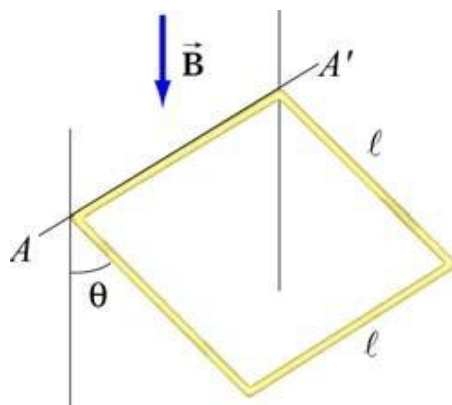


Рисунок 3.24 – Квадратная рамка в магнитном поле

- а) все силы, действующие на каждую из сторон квадрата, а также все направления тока для каждой из сторон, для поддержания равновесия.
- б) крутящий момент вокруг оси AA.
- в) Какова сила тока в контуре, для того, чтобы сумма момент сил вокруг оси была равна.
- г) Используя определение магнитного диполя для расчёта крутящего момента, оказываемого на контур из-за наличия магнитного поля, найдите крутящий момент вокруг оси AA.

**Задача 3.** Скольжение стержня под уклоном в магнитном поле

Проводящий стержень длины  $l$  помещается на наклонную плоскость без трения, наклоненную под углом  $\theta$  от горизонтали, как показано на рисунке 3.25

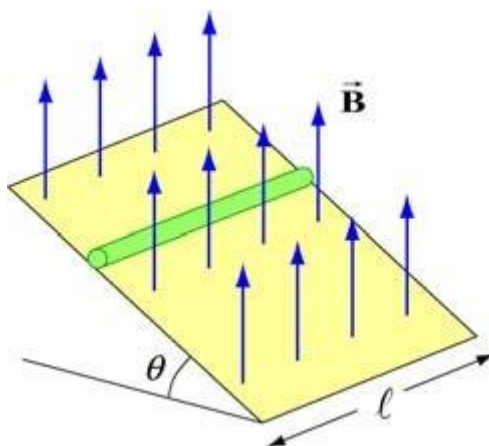


Рисунок 3.25 – Магнитная сила на проводящем стержне

Равномерное магнитное поле приложено вертикально. Чтобы предотвратить скольжение стержня вниз, к концам стержня подключается источник тока. Какова величина тока, чтобы стержень оставался неподвижным в земном поле тяжести. Найдите направление тока.

**Задача 4.** Траектория движения частиц в однородном магнитном поле

Заряженная частица с зарядом  $q$  движется с начальной скоростью  $v$ , затем она влетает в область между двумя пластинами, где включено однородное магнитное поле, направленное на страницу, как показано на рисунке 3.26.

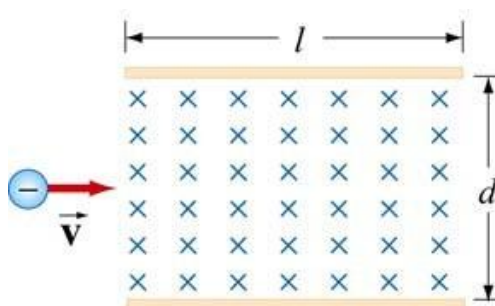


Рисунок 3.26 – Заряженная частица, движущаяся под действием магнитного поля

- а) Куда отклоняется ли траектория частицы: вверх или вниз?
- б) Вычислить расстояние между левым концом пластины и местом удара частицы.

**Задача 5.** Орбиты частиц в магнитном поле

Две заряженные частицы с одинаковыми зарядами  $q$  и с разными массами  $m_1$  и  $m_2$ , но с одинаковыми скоростями входят в область однородного магнитного поля. Вся полуплоскость  $XU$  справа заполнена однородным магнитным полем  $B$  и направленным от нас, как показано на рисунке 3.27.

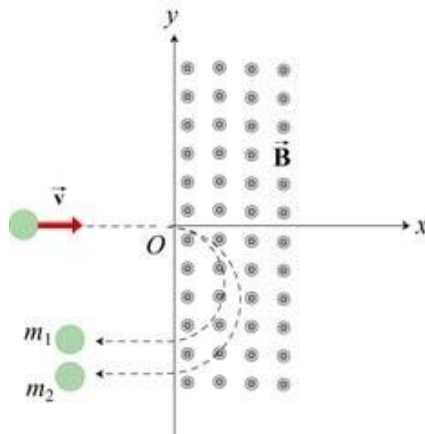


Рисунок 3.27 – Орбиты частиц в магнитном поле

Когда они попадают в область магнитного поля, их траектории изгибаются в одном направлении и описывают полукруги с разными радиусами. Радиус окружности второй частицы ровно в два раза больше радиуса первой частицы.

- Заряд этих частиц положителен или отрицателен?
- Найдите радиус траектории первой частицы через данные задачи.
- Найдите отношение масс частиц  $m_2 / m_1$ .

**Задача 6.** Крутящий момент на контуре с током в виде капли

Контур с током состоит из полукруга радиуса  $R$  и двух прямых отрезков длины  $l$  с углом  $\theta$  между ними. Контур находится в однородном магнитном поле, поле направленно слева направо (рисунок 3.28). а) Найдите суммарную силу, действующую на петлю. б) Чему равен крутящий момент, действующий на контур?

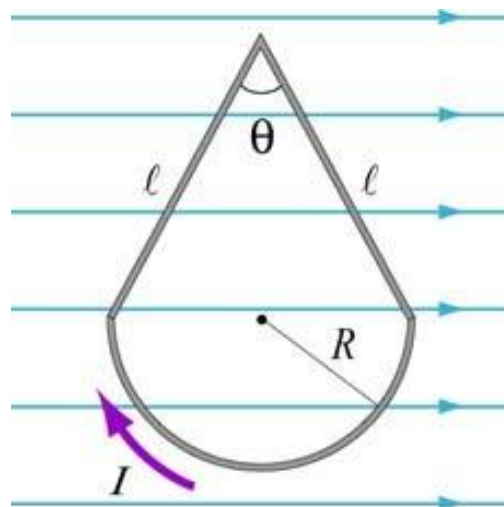


Рисунок 3.28 – Контур с током в однородном магнитном поле

## Глава 4. Постоянное магнитное поле

### §4.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Источником магнитных полей являются токи, возникающие вследствие движения зарядов. Когда заряды движутся в проводнике с током  $I$ , магнитное поле в любой точке  $P$ , обусловленное этим током, можно вычислить путём сложения вкладов магнитного поля  $d\vec{B}$  от небольших сегментов провода  $d\vec{l}$  (рисунок 4.1).

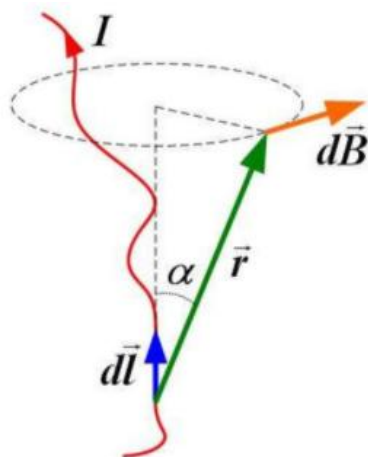


Рисунок 4.1 – Магнитное поле  $d\vec{B}$ , созданное линейным дифференциальным элементом  $I d\vec{l}$ .

Маленькие сегменты с током можно рассматривать как векторную величину, имеющую величину длины отрезка и указывающую в направлении текущего тока. Бесконечно малый источник тока может быть записан в виде  $I d\vec{l}$ .

Пусть  $r$  обозначает расстояние от источника тока до точки поля  $P$ , а  $\vec{r}$  – соответствующий радиус-вектор. Закон Био-Савара-Лапласа дает выражение для вклада магнитного поля  $d\vec{B}$  от источника тока  $I d\vec{l}$ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3} \quad (4.1)$$

где  $\mu_0$  – константа, так называемая магнитная постоянная:

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Гн/м.} \quad (4.2)$$

Обратите внимание, что это выражение похоже на закон Кулона для электрического поля, обусловленного зарядовым элементом  $dq$ :  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^3} r$ .

Сложение этих вкладов для нахождения магнитного поля в точке  $P$  требует интегрирования по источнику тока, такой интеграл является векторным, что означает, что выражение для магнитного поля  $B$  является тройным интегралом, по одному для каждого компонента вектора  $B$ . Векторный характер этого интеграла представляется в виде векторного произведения  $I dl \times r$ . Понимание того, как найти это векторное произведение, а затем выполнить интегрирование, будет ключом к изучению использования закона Био-Савара-Лапласа.

#### Пример 4.1. Магнитное поле, создаваемое конечным прямым проводом

Тонкий прямой провод длины  $2L$  с током  $I$  расположен вдоль оси  $z$ , как показано на рисунке 4.2. Оцените магнитное поле в точке  $A$ , находящейся в плоскости, перпендикулярной отрезку и проходящей через его центр на расстоянии  $a$  от провода.

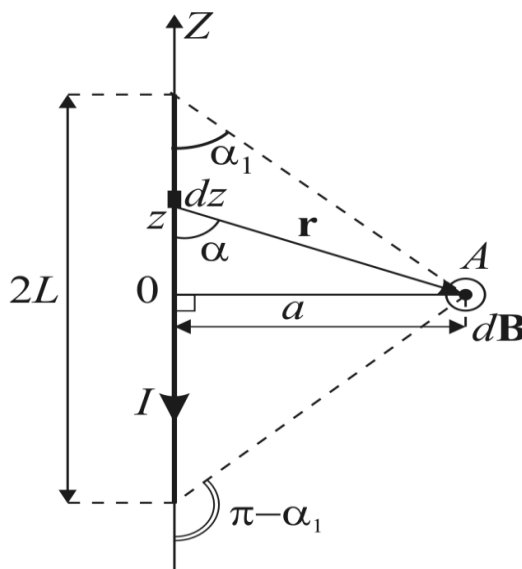


Рисунок 4.2 – Тонкий прямой провод с током  $I$

Решение: Выберем декартовую систему координат. Ось  $Z$  направим вдоль провода, как показано на рисунке. Ось  $Y$  проходит через точку  $A$ .

Рассмотрим линейный элемент тока  $Idl = Idz$ , находящийся на расстоянии  $z$  от начала координат. Этот элемент тока создает в точке  $A$  магнитное поле с индукцией  $dB$ .

Согласно формуле 4.1.1 вектор  $dB$  направлен на нас перпендикулярно плоскости рисунка, он обозначен кружком. Ток течёт против направления оси  $Z$ . Силовые линии магнитной индукции представляют собой концентрические круги.

Пусть угол от точки  $z$  к точке  $A$  равен  $\alpha$ . Из рисунка следует, что  $r = \frac{a}{\sin \alpha}$ ,

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}.$$

Тогда

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{ad\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times \mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0 I dl \sin \alpha}{4\pi r^2} = -\frac{\mu_0 I ad\alpha}{4\pi \sin^2 \alpha} \frac{\sin^2 \alpha}{a^2} = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi a} I \sin \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Тогда, интегрируя по углам, найдём магнитную индукцию. Учитывая симметрию задачи, можно интегрировать от угла  $\pi/2$  до угла  $\alpha$ , затем весь интеграл умножить на 2, так как вторая часть отрезка симметрична относительно начала координат.

$$B = 2 \int_{\pi/2}^{\alpha} dB = -2 \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\mu_0}{4\pi a} I \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cos \alpha$$

Так как  $\cos \alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2 + a^2}}$ , то окончательно получаем для магнитной индукции:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{L}{L^2 + a^2}$$

В предельном случае, когда длина прямолинейного провода бесконечна ( $a \ll L$ ), то магнитная индукция равна:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

Заметим, что в этом пределе система обладает цилиндрической симметрией, а линии магнитного поля являются круговыми, как показано на рисунке 4.3.

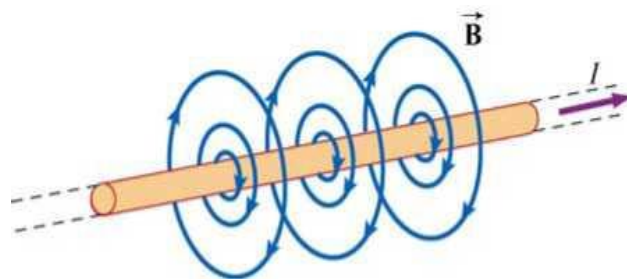


Рисунок 4.3 – Линии магнитного поля для бесконечного провода с током  $I$

**Пример 4.2** Определить величину индукции магнитного поля на оси кругового витка радиуса  $R$  с током  $I$  в зависимости от расстояния до его плоскости.

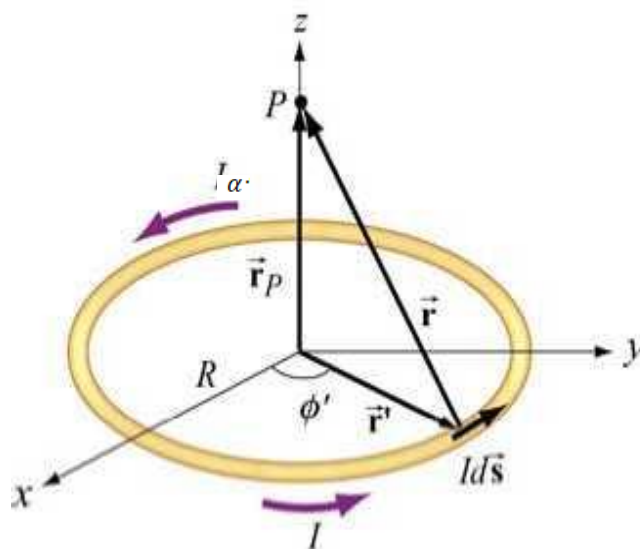


Рисунок 4.4 – Магнитное поле, создаваемое кольцом с током  $I$



Решение: а) это ещё один пример, связанный с применением закона Био-Савара-Лапласа. Давайте снова найдём магнитное поле, применив ту же методику, что и в примере 4.1.

Начало координат поместим в центр витка. Пусть между осью центра кольца от точки P до кольца угол составляет  $\alpha$ . Вектор  $dB$  индукции поля, создаваемого элементом тока  $I ds$ , перпендикулярен к векторам  $ds$  и  $r$  и лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его диаметр. Проекция вектора  $dB$  индукции поля на ось OZ по закону Био-Савара-Лапласа равна  $dB_z = \frac{\mu_0 I [ds \times r]}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} ds$ . Отсюда получим полную индукцию:

$$B = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{R^2 + z^2}^{3/2}$$

В центре кольца при  $z = 0$  индукция поля равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2 R}$$

При  $z \gg R$ :

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2 Z^3} = \frac{\mu_0 2\pi IR^2}{4\pi Z^3} = \frac{\mu_0 2IS}{4\pi Z^3} = \frac{\mu_0 2p_m}{4\pi Z^3}$$

где  $p_m$  – магнитный диполь. В этом случае можно круговой виток считать магнитным диполем и вычислять индукцию по аналогичной формуле, как и в случае электрического диполя.

## § 4.2 Сила Ампера для двух параллельных проводов

Проводник с током создаёт вокруг себя магнитное поле в виде концентрических окружностей. Кроме того, при помещении в магнитное поле другого проводника с током, на этот проводник будет действовать сила. Таким образом, два проводника с током будут оказывать друг на друга воздействие.

Рассмотрим два параллельных провода с расстоянием  $a$  между ними. Токи, протекающие по проводам в направлении  $+x$ , обозначим  $I_1$  и  $I_2$  соответственно, как показано на рисунке 4.3.

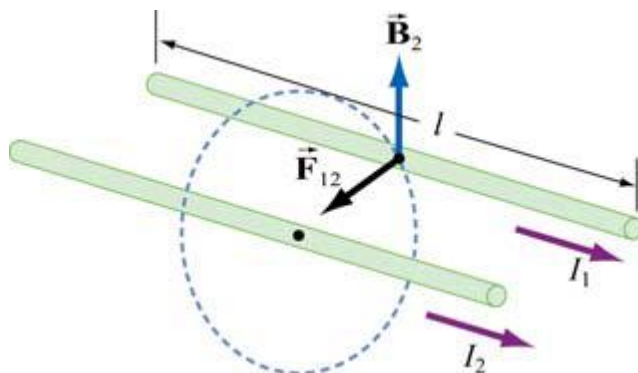


Рисунок 4.3 – Сила между двумя параллельными проводниками

Силу Ампера, действующую на проводник 1 со стороны проводника 2, можно вычислить, используя результат из примера 4.1. Так как ток  $I_2$  создает магнитное поле в виде концентрических окружностей, то в любой точке на проводнике 1 индукция магнитного поля равна  $B_2 = -(\mu_0 I_2 / 2\pi a) J$ . Она направлена в сторону оси  $OY$  перпендикулярно проводу 1, как показано на рисунке 4.3.

$$F_{12} = I_1 l \times B_2 = I_1 l i \times (-\mu_0 I_2 / 2\pi a) j = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a} k. \quad (4.3)$$

Сила  $F_{12}$  направлена в сторону проводника 2 согласно правилу левой руки. Главный вывод, который мы можем сделать из этого вычисления состоит в том, что два параллельных провода с параллельными токами, текущими в одном направлении, будут притягиваться друг к другу. Если токи текут в противоположных направлениях, то сила  $F_{12}$  будет отталкивающей.

### §4.3 Закон Ампера или закон полного тока

Мы видели, что движущиеся заряды или токи являются источником магнитного поля. Это можно легко продемонстрировать, поместив стрелки компаса

рядом с проводом.

Рассмотрим окружность и разделим круговую траекторию радиуса  $r$  на большое число векторов малой длины  $\Delta s = \Delta s \varphi$ , направленных вдоль тангенциального направления с величиной  $\Delta s$  (рисунок 4.4).

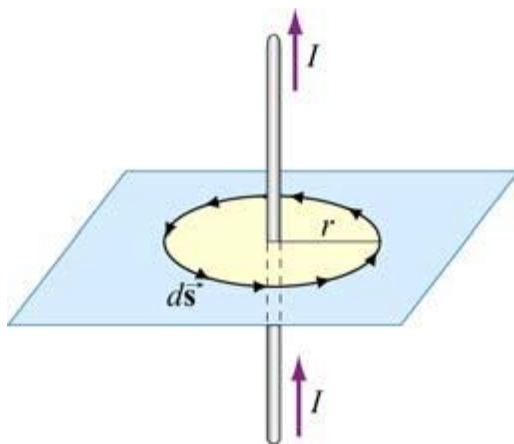


Рисунок 4.4 – Произвольная петля радиуса  $r$

В пределе  $\Delta s \rightarrow 0$  получаем

$$B ds = B \quad ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I. \quad (4.4)$$

Другими словами, линейный интеграл  $B ds$  вокруг любой замкнутой петли пропорционален  $I$  току, окруженному петлей.

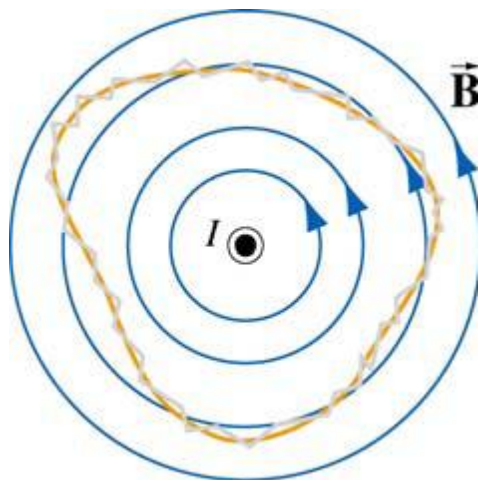


Рисунок 4.5 – Петля произвольной формы.

Теперь можно обобщить определение выше для любого замкнутого контура произвольной формы, как показано на рисунке 4.5, в виде выражения, известного как закон Ампера:

$$\oint B ds = \mu_0 I. \quad (4.5)$$

Интеграл  $\oint B ds$  называют циркуляцией вектора магнитной индукции.

Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции магнитного поля:

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, охватывающему токи, прямо пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур  $\oint B ds = \mu_0 \sum I_i$ .

Закон Ампера в магнитостатике аналогичен закону Гаусса в электростатике. Эту теорему очень удобно применять, если система обладает определенной симметрией. Например, для бесконечного провода система обладает цилиндрической симметрией, и закон Ампера очень легко применим. Однако, когда длина провода конечна, вместо этого следует использовать закон Био-Савара-Лапласа.

Таблица 1 – дифференциальная и интегральная форма записи

Закон Био-Савара-Лапласа	$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[dl \times r]}{r^3}$	Конечные провода
Закон Ампера	$\oint B ds = \mu_0 I$	Источник тока имеет определенную симметрию, например: бесконечный провод (цилиндрическая симметрия)

Рассмотрим длинный прямой провод радиуса  $R$ , с током  $I$ , который равномерно распределён по всему поперечному сечению, как показано на рис. 4.6.

Найти магнитное поле внутри провода и снаружи.

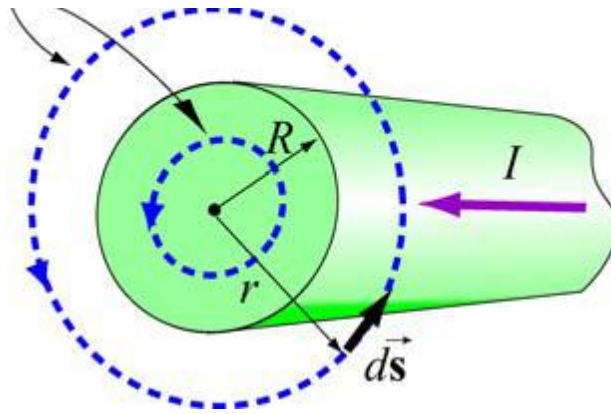


Рисунок 4.6 – Петля для расчёта поля  $B$  проводника с током радиуса  $R$

Решение:

Вне провода, мысленная петля в виде окружности радиуса  $r$  полностью содержит в себе ток  $I$ . Тогда

$$B ds = \mu_0 I \quad ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I.$$

Внутри провода, где  $r < R$ , величина тока, окруженного петлей (окружность), пропорциональна площади заключенной внутри окружности, т. е.,

$$I_{\text{вн}} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} I.$$

Тогда

$$B ds = B 2\pi r = \mu_0 I_{\text{вн}}.$$

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{вн}}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}.$$

Легко заметить, что магнитная индукция внутри провода линейно возрастает от нуля до радиуса  $r = R$ , снаружи провода индукция поля падает как  $r^{-1}$ .

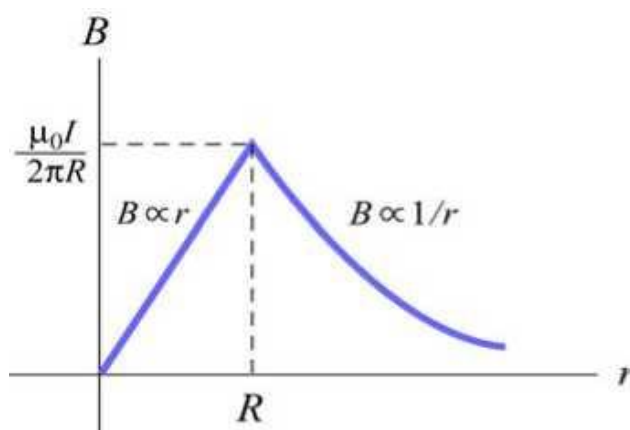


Рисунок 4.7 – Магнитное поле проводника.

На графике 4.7 показано поведение магнитного поля в зависимости от расстояния внутри и снаружи проводника.

#### §4.4 Магнитные материалы

Физические свойства магнетизма для материальных сред существенно отличается от свойств среды в электростатике. В электростатике диэлектрические среды уменьшали внешнее электрическое поле. Для магнитных материалов при наличии внешнего магнитного поля возможны следующие эффекты в зависимости от материала:

1. Диамагнитные материалы уменьшают индукцию приложенного магнитного поля  $B$ .
2. Парамагнитные материалы увеличивают магнитное поле  $B$  немного выше приложенного магнитного поля.
3. Ферромагнитные материалы многократно увеличивают приложенное магнитное поле  $B$ .

#### §4.5 Намагниченность

Известно, что магнитных зарядов нет. Магнитное поле контура с током эквивалентно магнитному диполю. Ампер предположил, что в веществе на

молекулярном или на атомном уровне существуют круговые молекулярные токи, которые создают или индуцируют магнитные моменты. Все вещества состоят из множества постоянных или индуцированных магнитных диполей. Теперь известно, что эти токи создаются электронами, которые вращаются по орбитам. Эти токи объясняют магнитный момент у магнетика. Вторая причина – это собственный магнитный момент электрона. Одним из понятий, которое имеет значение для изучения магнитных свойств вещества, является усреднённое магнитное поле по ансамблю магнитных моментов вещества, создаваемое многими магнитными диполями. Рассмотрим материал в виде цилиндра длины  $L$  площадью поперечного сечения  $S$ , состоящим из  $N$  магнитных диполей с собственным магнитным моментом  $m$ , равномерно распределенного по всему объёму цилиндра, как показано на рисунке 4.8.

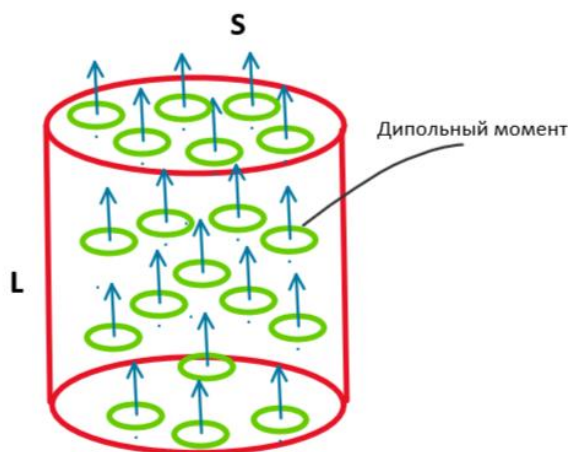


Рисунок 4.8 – Цилиндр с  $N$  магнитными дипольными моментами

Для простоты вычислений предположим, что все магнитные дипольные моменты  $m$  направлены и совпадают с осью цилиндра. Нужно найти усреднённое магнитное поле  $B$ , обусловленное только этими диполями в отсутствие внешнего магнитного поля.

Как мы выше выяснили, каждый магнитный диполь обладает собственным магнитным полем. Дадим определение вектору намагниченности  $M$  как сумме всех векторов магнитного дипольного момента на единицу объёма:

$$M = \frac{1}{V} \sum_i m_i, \quad (4.6)$$

где  $V$  – объём цилиндра. Для цилиндра легко найти намагниченность, где все диполи выстроены в одну сторону, тогда величина  $M = Nm/SL$ .

Для того, чтобы найти среднее магнитное поле, создаваемое всеми диполями в цилиндре, нужно более детально рассмотреть молекулярные токи внутри цилиндра.

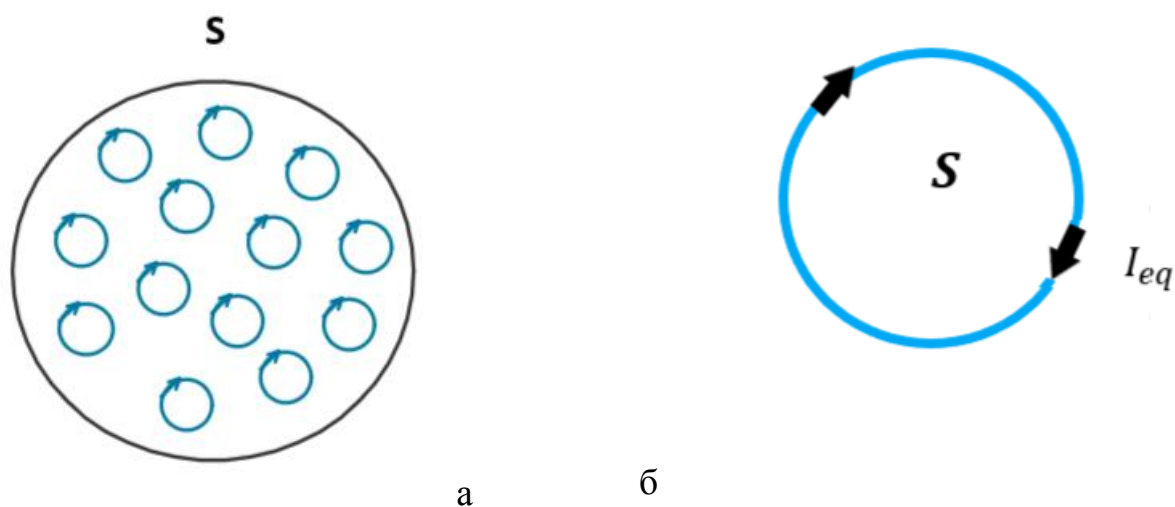


Рисунок 4.9 – а) Вид сверху на цилиндр, содержащего магнитные дипольные моменты. б) Суммарный эквивалентный ток.

На рисунке 4.9(а) показаны молекулярные токи в виде окружностей, их дипольный момент связан с направлением токов, как показано на рисунке. Если рассмотреть внутреннее пространство вещества, то молекулярный ток одного атома или молекулы будет скомпенсирован токами, протекающими в противоположном направлении от соседних молекулярных токов. Некомпенсированным местом будет край цилиндра, где отсутствуют соседние молекулярные токи. Отсюда можно заключить, что внутри цилиндра ток исчезает, а во внешней стороне цилиндра имеется молекулярный ток. На рисунке 4.9(б) показан суммарный эквивалентный ток, который течёт по бокам цилиндра.

Получим функциональную зависимость тока  $I_{eq}$ . Пусть магнитный дипольный



момент, создаваемый ток  $I_{eq}$ , будет таким же, как полный магнитный дипольный момент системы. Это условие даёт

$$I_{eq} A = mN \quad (4.7)$$

или

$$I_{eq} = \frac{mN}{S}. \quad (4.8)$$

Далее, рассчитаем магнитное поле, создаваемое  $I_{eq}$ . Ток  $I_{eq}$ , текущий по бокам, эквивалентная конфигурация идентична соленоиду, несущему поверхностный ток (или ток на единицу длины)  $\tau$ . Эти две величины связаны между собой

$$\tau = \frac{I_{eq}}{L} = Nm/SL = M. \quad (4.9)$$

Таким образом, поверхностный ток  $\tau$  равен намагниченности  $M$ , которая является средним магнитным дипольным моментом на единицу объёма. Среднее магнитное поле, создаваемое эквивалентной системой тока, задается

$$B_M = \mu_0 \tau = \mu_0 M. \quad (4.10)$$

Поскольку направление этого магнитного поля совпадает с направлением  $M$ , приведённое выше выражение может быть записано в векторной форме как

$$B_M = \mu_0 M. \quad (4.11)$$

Если сравнить данный результат с ситуацией для электрических диполей, то

получим прямо противоположную ситуацию, для которой усреднённое электрическое поле материала противоположно направлению электрических диполей. Объяснение этой ситуации кроется в том, что в области, расположенной внутри магнитного диполя (молекулярного тока), магнитное поле сонаправлено с вектором магнитного диполя. Поэтому после усреднения по всему образцу материала среднее магнитное поле оказывается параллельным среднему магнитному дипольному моменту в единицу объёма.

Нужно отметить, что магнитное поле в уравнении (4.11) является суммарным усреднённым полем, созданное всеми магнитными диполями. Если же рассмотреть магнитный диполь очень близко, то, конечно, его поле будет очень большим. Теперь рассмотрим свойства различных магнитных материалов.

#### §4.6 Парамагнетизм

Атомы или молекулы, входящие в состав парамагнитных материалов, обладают постоянным магнитным дипольным моментом. Предоставленные сами себе, постоянные магнитные диполи в парамагнитном материале никогда не выстраиваются спонтанно. В отсутствие любого приложенного внешнего магнитного поля, они расположены в пространстве хаотично. Таким образом,  $M = 0$  и среднее магнитное поле  $B_M$  также равно нулю. Однако, когда парамагнитный материал помещаем во внешнее поле  $B_0$ , диполи испытывают крутящий момент  $\tau = m \times B_0$ , который стремится выровнять  $m$  с  $B_0$ , тем самым создавая намагниченность  $M$ , параллельную  $B_0$ . Так как  $M$  параллельно  $B_0$ , то намагниченность он будет стремиться повысить поле  $B_0$ . Полное магнитное поле  $B$  является суммой этих двух полей:

$$B = B_0 + B_M = B_0 + \mu_0 M. \quad (4.12)$$

Как было показано в предыдущем параграфе, этот случай отличается от случая с диэлектрическими материалами. Для диэлектриков дипольный момент

выравнивается внешним полем, но эти диполи уменьшают внешнее электрическое поле, а для парамагнитного материала дипольные моменты также выравниваются внешним магнитным полем и усиливает это поле. В большинстве парамагнитных веществ намагниченность  $M$  не только находится в том же направлении, что и  $B_0$ , но и линейно пропорциональна  $B_0$ . Это правдоподобно, потому что без внешнего поля  $B_0$  не было бы выравнивания диполей и, следовательно, не было бы намагниченности  $M$ . Линейная зависимость между  $M$  и  $B_0$  выражается в виде

$$M = \chi \frac{B_0}{\mu_0}, \quad (4.13)$$

где  $\chi$  – безразмерная величина и называется магнитной восприимчивостью. Тогда уравнение можно переписать в следующем виде:

$$B = B_0 + \chi B_0 = (1 + \chi) B_0 = k_m B_0, \quad (4.14)$$

где  $k_m$  – называется относительной проницаемостью материала. Для парамагнитных веществ,  $k_m > 1$ , или эквивалентно  $\chi > 0$ . Обычно  $\chi$  составляет порядка  $10^{-6}$  до  $10^{-3}$ . Магнитная проницаемость материала определяется как

$$\mu = (1 + \chi)\mu_0 \quad (4.15)$$

Парамагнитные материалы имеют  $\mu > \mu_0$ .

#### §4.7 Диамагнетизм

В случае магнитных материалов, где нет постоянных магнитных диполей, внешнее поле  $B_0$  будет индуцировать магнитные дипольные моменты в атомах или молекулах. Однако эти индуцированные магнитные диполи антипараллельны  $B_0$ ,

что приводит к намагниченности  $M$  и среднему полю  $B_M$  антипараллельны  $B_0$ , и, следовательно, к уменьшению общей напряжённости магнитного поля. Также, как было введено для диамагнетиков диэлектрическая проницаемость вводится магнитная проницаемость диамагнетиков  $\mu$ , при этом  $\mu < \mu_0$ . Магнитная проницаемость практически не зависит ни от индукции внешнего намагничивающего поля, ни от температуры. При извлечении диамагнетика из магнитного поля он полностью размагничивается и магнитного поля не создаёт. К диамагнетикам относятся многие металлы – такие как Ag, Au, Cu, Bi, органические молекулы и другие вещества.

#### §4.8 Ферромагнетизм

Для ферромагнитных материалов характерно сильное взаимодействие между атомными дипольными моментами. Оно описывается с помощью обменного интеграла и изучается в курсе квантовой механики. Самыми известными материалами, обладающими ферромагнитными свойствами, являются железо, кобальт и соединения кобальта. Ферромагнетики состоят из множества мелких макроскопических областей, называемых доменами. На рисунке 4.10(а) показана доменная структура ферромагнетика. Домены, как правило, направлены в обычных условиях хаотично. Внешнее магнитное поле  $B_0$  будет стремиться выровнять все домены параллельно. На рисунке 4.10(б) показан рост доменов по полю. Если приложенное внешнее поле слабое, то смещение доменов является обратимым. Если приложенное поле сильное, то домены выстраиваются во всем образце и остаются в таком состоянии даже при выключении внешнего поля. Тогда наблюдается остаточная намагниченность образца. Сильное обменное взаимодействие между соседними атомными дипольными моментами вызывает гораздо более сильное выравнивание магнитных диполей, чем в парамагнитных материалах.

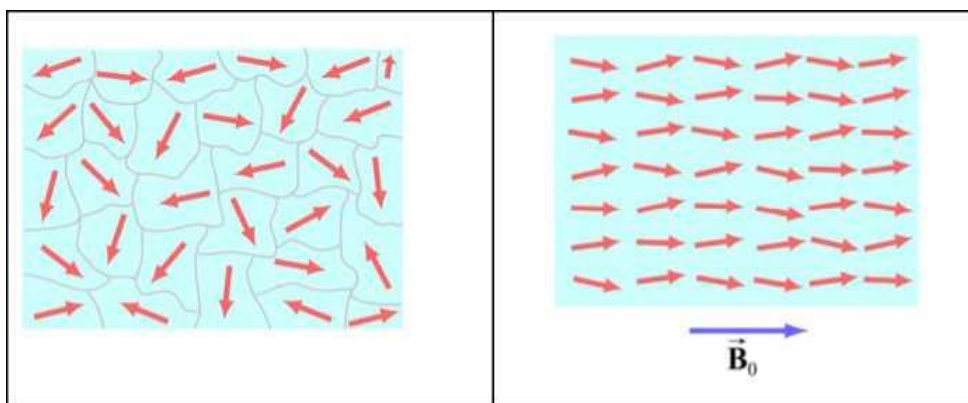


Рисунок 4.10 – а) ферромагнитные домены. б) выравнивание магнитных моментов в направлении внешнего поля  $B_0$

Усиление приложенного внешнего магнитного поля может быть значительным, при этом полное магнитное поле внутри ферромагнетика в 10 или более раз больше приложенного поля. Проницаемость ферромагнитного материала не является постоянной величиной, так как ни суммарное поле  $B$ , ни намагниченность  $M$  линейно не увеличиваются. На самом деле зависимости между ними не уникальны, а зависят от предшествующей истории намагничивания материала. Это явление известно как гистерезис. Изменения  $M$  в зависимости от внешнего приложенного магнитного поля  $B_0$  показано на рис. 4.11. Петля abcdef представляет собой гистерезисную кривую.

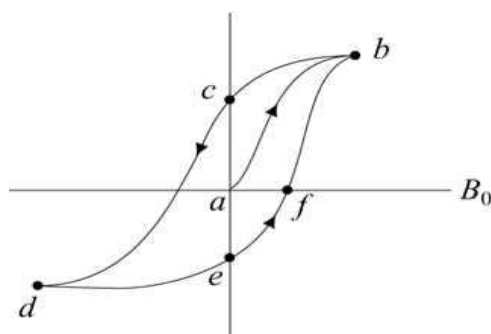


Рисунок 4.11 – Кривая гистерезиса

Из-за сильного обменного взаимодействия между атомными диполями магнитная проницаемость будет зависеть от приложенного поля нелинейным

образом. Дипольные моменты могут удерживать эти дипольные моменты в одном направлении, даже если внешнее поле отключить. Таким образом, домены могут создавать сильное магнитное поле, без внешнего магнитного поля. Так образуются постоянные магниты. Оценим, насколько сильное поле может создавать постоянный магнит, для этого рассмотрим тот факт, что магнитные дипольные моменты атомов обычно имеют величины порядка  $10^{-23} \text{ А} \cdot \text{ м}^2$ . Типичная плотность  $10^{29}$  атомов/ $\text{ м}^3$ . Если бы все эти дипольные моменты были сонаправлены, то мы получили бы намагниченность порядка

$$M \sim 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{ м}^2 \cdot 10^{29} \text{ атомов} \cdot \text{ м}^{-3} = 10^6 \text{ А} \cdot \text{ м}^{-1}$$

Намагниченность соответствует значениям  $B_M = \mu_0 M$  порядка 1 Тесла, или 10 000 Гаусс, только благодаря атомным токам. Так мы получаем постоянные магниты с полями порядка 2200 Гаусс.

### Дополнительные вопросы

1. Сравните и противопоставьте закон Био-Савара-Лапласа в магнитостатике закону Кулона в электростатике.
2. Если через пружину пропускают ток, то пружина растягивается или сжимается? Объяснить.
3. Как выбирается путь интегрирования  $B ds$  при применении закона Ампера?
4. Предположим, что три бесконечно длинных параллельных провода расположены таким образом, что в поперечном сечении они находятся в углах равностороннего треугольника. Можно ли расположить токи (сочетание протекающих внутри или снаружи страницы) так, чтобы все три провода (а) притягивались и (б) отталкивались друг от друга? Объяснить.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Определить величину индукции магнитного поля в центре равностороннего треугольника со стороной  $a$ , если:

- а) его обтекает ток  $I$ ;

б) источник ЭДС подключён к двум вершинам треугольника. Поле подводящих проводов не учитывать, сопротивление всех сторон треугольника одинаково.

Ответ: а)  $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$  б)  $B = 0$ .

**Задача 2** Ток  $I$  течёт по тонкому замкнутому проводнику, показанному на рисунке. 4.11 Радиус изогнутой части проводника равен  $R$ , угол  $2\varphi = 90^\circ$ . Найти величину индукции магнитного поля в точке  $O$ .

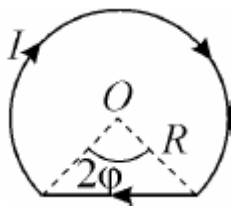


Рисунок 4.11 – Замкнутый проводник с током  $I$

**Задача 3** Внутри длинного прямого провода круглого сечения имеется длинная круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно неё на расстояние  $d$ . По проводу течёт постоянный ток плотности  $j$ , равномерно распределённый по сечению. Пренебрегая влиянием вещества провода, определить величину индукции магнитного поля внутри полости.

Ответ:  $B = \frac{\mu_0}{2} jd$

## Список использованных источников

1. Матвеев, А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. – М: Оникс 21 век, 2005. - 464 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики.: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М., Физматлит, 2006. – Т. 3: Электричество – 656 с.
3. Калашников, С. Г. Электричество / С. Г. Калашников. – М.: Физматлит, 2003. – 624 с.
4. Тамм, И. Е. Основы теории электричества / И. Е. Тамм. – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики: в 3-х т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика: учебное пособие / И. В. Савельев. – 7-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2007. – 496 с.
6. Иродов, И. Е. Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. – 5-е изд. – М.: БИНОМ; Лаборатория знаний, 2006. – 319 с.