Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНЫХ СТРУКТУР ОДНООСНЫХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

Монография

Рекомендовано к изданию ученым советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
2019

УДК 539.293.2(075.8)
ББК 31.233я73
Ч 67

Рецензенты
профессор, доктор технических наук Ю.Г. Полкунов
профессор, доктор физико-математических наук О.Н. Каныгина

Авторы: Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров, А.М. Ерёмин, В.В. Гуньков

Ч 67 Численное моделирование магнитных структур одноосных ферромагнетиков [Электронный ресурс] : монография /Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров, А.М. Ерёмин, В.В. Гуньков; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2019. – 165 с.
ISBN 978-5-7410-2403-4

В монографии представлены разработки эффективных методов численного (компьютерного) моделирования микромагнитных систем и результаты их применение для уточнения и развития общих представлений о формировании магнитных структур в одноосных магнетиках различной геометрии, а также выявление новых возможностей их практического использования. Разработанные численные методы значительно расширяют круг микромагнитных систем, доступных для компьютерного моделирования, а результаты расчетов способствуют развитию представлений о закономерностях и механизмах формирования экспериментально наблюдаемых структур в магнитных материалах.

Монография представляет интерес для специалистов по моделированию физических процессов и физике магнитных материалов, а также студентов, магистрантов и аспирантов физико-математического направления.

УДК 539.293.2(075.8)
ББК 31.233я73

ISBN 978-5-7410-2403-4

Содержание

Введение

В современной терминологии микромагнетизмом (микромагнетикой, микромагнитным моделированием) называется феноменологическая теория, предназначенная для определения конфигураций распределения поля намагниченности $\mathbf{M} = (M^x, M^y, M^z)$ (или, иначе, плотности магнитного момента) в системе с ферромагнитными свойствами. В данной работе мы будем использовать термин «ферромагнетик», так как чаще всего изучаемые в рамках микромагнетизма магнитные материалы являются ферромагнетиками. Несмотря на это можно не нарушая общности утверждать, что результаты микромагнитного моделирования вполне успешно применимы для всех видов магнетиков, в которых наблюдается упорядоченное ориентирование магнитных моментов и усредненный магнитный момент которых ненулевой. [1].

Будем обозначать вектором **M** результат усреднения по масштабам, лежащим в границах от размеров атомов, до характерных размеров элементов магнитной структуры (к таковым относятся границы доменов). В данной работе принято допущение, что внутри объема кристалла изменение вектора **M** непрерывно. Механизм формирования намагниченности лежит за рамками теории микромагнетизма. Кроме того, в теории микрома принимается допущение, что модуль вектора намагниченности $M_s = |\mathbf{M}|$ остаётся неизменным в объеме кристалла при постоянной температуре для данного магнетика. Кроме того, модуль вектора намагниченности сохраняет независимость от внешнего поля. Это приводит к тому, что изменение векторного поля намагниченности выражается лишь в изменении направлений векторов **M** в объеме кристалла.

Ландау и Лифшица в работе 1935 года [2] впервые определяли с помощью вычисления минимума функционала свободной энергии исходные характеристики доменной структуры (конфигурацию поля вектора **M**). Эта статья считается первой работой по микромагнетизму. Описанный в статье подход иногда называют модельной теорией или модельным подходом [3], его суть заключается в использовании доменной структуры образца в качестве исходных данных, тогда целью задачи является определение количественных характеристик доменной структуры. Описанный метод часто применялась в ранних работах, где приводилось описание моделирования доменных структур. Следует отметить, что и в настоящее время такой подход с различными вариациями успешно используется при решении задач о нахождении полей вектора **M** при равновесном распределении намагниченности в объеме образца.

Один из двух изложенных в работе [2] методов решения задач микромагнетизма заключается в нахождении локальных минимумов функционала свободной энергии, соответствующим стабильным или метастабильным состояниям системы. Второй метод заключается в нахождении полей намагниченности с помощью решения дифференциального уравнения, описывающего изменение поля намагниченности с учетом рассеяния. Такие уравнения носят название Ландау-Лифшица или Ландау-Лифшица-Гильберта в зависимости от записи диссипативного члена. С помощью таких уравнений находятся траектории перехода систем из начального состояния в равновесное. Равновесным состояниям соответствуют стационарные решения уравнений.

В теории микромагнетизма магнетик описывается как сплошная среда, что сродни подходу, используемому в механике жидкостей. Задачи микромагнетизма значительно проще, так как здесь используется меньшее количество определяющих соотношений. В то время как механика жидкостей учитывает связь полей скоростей и полей напряжений, в микромагнетизме используется функционал свободной энергии, а его вариации не слишком сильно влияют на трудоёмкость вычислений. Это позволяет значительно расширить круг задач микромагнетизма без существенного усложнения алгоритмов и без заметного увеличения времени и объёма вычислений.

Современный этап развития технологий производства элементной базы микроэлектроники сделал актуальным развитие методов описания и изучения магнитных систем малого и сверхмалого размера.

Настоящая монография посвящается рассмотрению методов моделирования и их применения для решения конкретных задач. В частности, далее мы рассматриваем методы магнитной записи информации и оценки потенциальных возможностей повышения её плотности в устройствах вычислительной техники. Основной же целью настоящей работы является уточнение и развитие общих представлений о формировании магнитных структур в одноосных магнетиках различной геометрии и выявление новых возможностей их практического использования с помощью оригинальных эффективных методов численного (компьютерного) моделирования микромагнитных систем.

В первой главе монографии рассматриваются основные формулировки задач о расчете полей намагниченности в рамках теории микромагнетизма, форма записи функционала свободной энергии микромагнитной системы и его составляющих, методы нахождения устойчивого равновесного состояния микромагнитной системы. Особое внимание уделено методам вычисления размагничивающего (собственного) поля магнитной системы, поскольку их эффективность является основным фактором эффективности расчета полей намагниченности в целом.

Во второй главе монографии представлен оригинальный метод минимизации функционала свободной энергии, учитывающий неявную зависимость потенциала магнитостатического поля от поля намагниченности, позволивший обнаружить возможную причину попадания в процессе минимизации функционала свободной энергии в «седловые точки».

Методами минимизации функционала свободной энергии и решением уравнения Ландау-Лифшица рассчитано распределение намагниченности в бесконечно длинных монокристаллических призмах Co, $Nd_2Fe_{14}B$ и $Ni_{80}Fe_{20}$ с квадратными и треугольными поперечными сечениями разных размеров. Получен критерий ориентации однородного поля намагниченности в бесконечно длинной призме квадратного сечения.

В третей главе моделируется термическое намагничивание в многослойной системе (многослойной пленке) и в бесконечно длинном монокристалле. Установлено, что в этих системах термическое намагничивание происходит под действием разных факторов. При ослаблении анизотропии в результате нагревания обменное взаимодействие в многослойной системе стремится ориентировать поле намагниченности в некотором одном направлении, а в бесконечно длинном монокристалле с поперечной ориентацией ОЛН поле намагниченности ориентируется в продольном направлении под действием размагничивающего поля.

В четвертой главе предлагается оригинальный метод расчета распределения намагниченности в монокристалле в виде полубесконечного стержня. Метод основан на разделении монокристалла на две области. Конечную, прилегающую к торцу стержня, с трехмерным полем намагниченности и остальную (полубесконечную), в которой поле намагниченности предполагается двумерным. При расчете намагниченности в конечной области учитывается влияние магнитостатического поля полубесконечной части стержня. Приводятся примеры расчетов для монокристаллов с поперечной ориентацией оси легкого намагничивания, показывающие, что в одном и том же образце возможны равновесные состояния, когда распределение намагниченности на торцевой поверхности соответствует распределению намагниченности в глубине стержня, и когда оно на торцевой поверхности качественно отличается от распределения в глубине.

В пятой главе излагается оригинальный конечно-разностный метод расчета распределения намагниченности в тонкой монокристаллической пластинке. Предполагается, что распределение намагниченности изменяется только в плоскости пластинки, т.е. является двумерным. Результаты расчетов сравниваются с результатами, полученными на основе решения соответствующей задачи в полной (трехмерной) постановке.

Разработанный метод использован для расчета доменных структур в пластинках одноосных магнетиков Co и $Nd_2Fe_{14}B$, которые резко отличаются значениями магнитокристаллической анизотропии.

Моделируется магнитная запись на монокристаллической дорожке, при которой магнитостатическим (собственным) полем дорожки формируется полосовая доменная структура, а информационными битами являются блоховские границы доменов.

Глава 1 Расчеты полей намагниченности методами численного моделирования

1.1 Основные методы и подходы

Основные формулировки задач о расчете полей намагниченности методами микромагнетизма, описанные в работе [2], были развиты и обобщенны многими исследователями, и в наиболее общем виде изложены в работе Брауна [4], в соответствие с которой функционал свободной энергии микромагнитной системы E имеет вид:

$$E = E_e + E_a + E_d + E_{ext} + E_s \,. \tag{1.1}$$

Компоненты свободной энергии в гауссовой системе записываются указанным ниже способом. Итак, энергия обменного взаимодействия E_e:

$$E_e = \iiint\limits_V A\left[\left(\nabla m^x\right)^2 + \left(\nabla m^y\right)^2 + \left(\nabla m^z\right)^2\right] dV \,, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_s = (m^x, m^y, m^z)$ – единичный вектор в пределах всего объема ферромагнетика *V*. За пределами объема *V* вектор намагниченности, очевидно, равен нулю $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, тогда обозначим вектором $\mathbf{m}$ нулевой вектор ($\mathbf{m} = \mathbf{0}$). Такой подход в дальнейшем позволит расширить применение некоторых формул за пределы объема *V* (за границы ферромагнетика). *A* – константа обмена. Кристаллическая решётка определяет вид функционала энергии магнитной анизотропии (внутриобъемной анизотропии) E_a. В данной работе рассматриваются одноосные ферромагнетики, для которых функционал E_a имеет вид:

$$E_a = \iiint\limits_V \left[K_1\left(1 - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right) + K_2\left(1 - (\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right)^2\right] dV \,, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{w}$ - единичный вектор направления оси легкого намагничивания (ОЛН), K_1, K_2 – константы магнитокристаллической анизотропии. В собственном (размагничивающем) поле энергия системы описывается одним из двух выражений:

$$E_d = -0.5\iiint\limits_V \mathbf{M}\cdot\mathbf{H}_d\, dV \qquad (1.4)$$

или:

$$E_d = \frac{1}{8\pi}\iiint\limits_{V_\infty} \mathbf{H}_d^2\, dV\,. \qquad (1.5)$$

где $\mathbf{H}_d$ - напряженность собственного (размагничивающего) поля системы. Интеграл в выражении (1.5) вычисляется по неограниченному пространству V_∞. Энергия системы во внешнем поле напряженностью $\mathbf{H}_{ext}$ описывается выражением:

$$E_{ext} = -\iiint\limits_V \mathbf{M}\cdot\mathbf{H}_{ext} dV\,. \qquad (1.6)$$

Поверхностная энергия ферромагнетика E_s, заключённого в объеме, ограниченном поверхностью S, описывается выражением:

$$E_s = \frac{K_s}{2}\iint\limits_S (\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})^2\, dS\,, \qquad (1.7)$$

где K_s - константа поверхностной магнитной анизотропии.

Первый дифференциал (первая вариация) функционала (1.1) [4]:

$$\begin{aligned}\delta E = -\iiint\limits_V \left[2A\Delta\mathbf{m} + \mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})(2K_1 + 4K_2(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2)) + M_s(\mathbf{H}_d + \mathbf{H}_{ext})\right]\cdot\delta\mathbf{m} dV + \\ + \iint\limits_S \left[-2A\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial(-\mathbf{n})} + K_s(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{n}\right]\cdot\delta\mathbf{m} dS.\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Здесь принято, что энергия E_a соответствует одноосному магнетику (1.3). Символом $\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial(-\mathbf{n})}$ обозначена производная вектора $\mathbf{m}$ по направлению вектора $-\mathbf{n}$. При выводе формул мы используем определение производной по направлению для функции f, отображающей линейное нормированное пространство X в линейное нормированное пространство Y [5]: $\frac{\partial f}{\partial e} = \lim\limits_{t\to+0}\frac{f(x+te)-f(x)}{t}$, где $x \in X$ - координата, в которой вычисляется производная; $e \in X$ - единичный вектор ($\|e\| = 1$); $f(x) \in Y$; t – скалярная константа. В формуле (1.8) под X и Y понимаются пространства геометрических векторов.

В точках экстремумов функционала E (в частности, в точках локальных минимумов) необходимо выполнение условия $\delta E = 0$, для выполнения которого достаточно, чтобы оба подынтегральные выражения в формуле (1.8) равнялись нулю в каждой точке объема V и поверхности S соответственно. Поскольку изменение вектора $\mathbf{m}$ в ферромагнетике сводится к его вариации по направлению, то предполагается, что для малых $\delta\mathbf{m}$ реализуется ориентация $\delta\mathbf{m} \perp \mathbf{m}$. Отсюда следует, что подынтегральные выражения обращаются в нуль, если векторы, записанные в квадратных скобках, коллинеарны вектору $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m} \times \left[2A\Delta\mathbf{m} / M_s + \mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})(2K_1 + 4K_2(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2)) / M_s + \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_{ext} \right] = \mathbf{0}, \qquad (1.9)$$

$$\mathbf{m} \times \left[-2A\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial(-\mathbf{n})} + K_s(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{n} \right] = \mathbf{0}. \qquad (1.10)$$

Таким образом, в состояниях равновесия системы внутри магнетика выполняется равенство (1.9), а на его поверхности – (1.10). Вектор в квадратных скобках в левой части (1.9) имеет размерность напряженности магнитного поля и называется вектором эффективного поля $\mathbf{H}_{eff}$:

$$\mathbf{H}_{eff} = 2A\Delta\mathbf{m} / M_s + \mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})(2K_1 + 4K_2(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2)) / M_s + \mathbf{H}_d + \mathbf{H}_{ext}.$$

Уравнение Ландау-Лифшица постулирует эволюцию поля намагниченности $\mathbf{M}$ к равновесному состоянию и может быть записано в двух эквивалентных выражениях [4,6]:

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = -|\gamma'|\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{eff} - \frac{\lambda|\gamma'|}{M_s}\mathbf{M}\times\left(\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{eff}\right), \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} = -|\gamma|\mathbf{M}\times\mathbf{H}_{eff} + \frac{\lambda}{M_s}\mathbf{M}\times\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t}, \qquad (1.12)$$

где γ - гиромагнитное отношение электрона $\gamma' = \dfrac{\gamma}{1+\lambda^2}$, t – время, $\lambda > 0$ параметр, определяющий скорость затухания прецессии вектора $\mathbf{M}$ вокруг вектора $\mathbf{H}_{eff}$.

Уравнение (1.12) называют так же уравнением Ландау-Лифшица-Гильберта или уравнением в форме Гильберта. В качестве граничного условия для уравнений (1.11) – (1.12) используется условие равновесия на поверхности (1.10). При отсутствии поверхностной анизотропии ($K_s = 0$), с учетом, что $\dfrac{\partial\mathbf{m}}{\partial(-\mathbf{n})} \perp \mathbf{m}$ из равенства (1.10) следует, что на поверхности должно выполнятся условие $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial(-\mathbf{n})} = \mathbf{0}$.

Потенциальное поле $\mathbf{H}_d$ можно представить в виде $\mathbf{H}_d = -\nabla u$, где u – потенциал (скалярный), создаваемый объемными источниками с плотностью $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ и поверхностными источниками с плотностью $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ - единичная внешняя нормаль к поверхности образца. Для вычисления скалярного поля u применяются методы, с помощью которых всюду непрерывная функция u находится либо из решения задачи

$$\Delta u = \begin{cases} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M} & \text{внутри магнетика} \\ 0 & \text{вне магнетика} \end{cases}, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial u}{\partial(-\mathbf{n})} = -4\pi \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \text{ на границе ферромагнетика,} \tag{1.14}$$

либо как сумма вклада объемных и поверхностных источников

$$u(\mathbf{r}_0) = \iiint\limits_V -\nabla \cdot \mathbf{M} / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| dV + \iint\limits_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| dS, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор точки вычисления потенциала, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ - переменная интегрирования, изменяемая в тройном интеграле по всему объему магнетика V, а в двойном интеграле – только по его поверхности S.

Найти устойчивое равновесное состояние микромагнитной системы можно минимизацией функционала (1.1). Однако задача, состоящая в поиске локального минимума (1.1) при условиях (1.13) - (1.14) либо (1.15), математически некорректна. Из физических соображений ясно, что ее решение может оказаться не единственным. Учитывая вышесказанное, необходимо в постановке задачи дополнительно использовать правило выбора локального минимума. Приняв допущение, что траектории наискорейшего понижения функционала является траекторией эволюции системы, получаем возможность применять градиентный (наискорейший) спуск для численного получения вида дискретного аналога функционала (1.1) – E^h. Здесь E^h имеет смысл функции конечного числа переменных. В в качестве таких переменных могут выступать или координаты единичного вектора намагниченности m^x, m^y и m^z, или углы φ и θ (рисунок 1.1) в узлах (ячейках) вычислительной сетки.

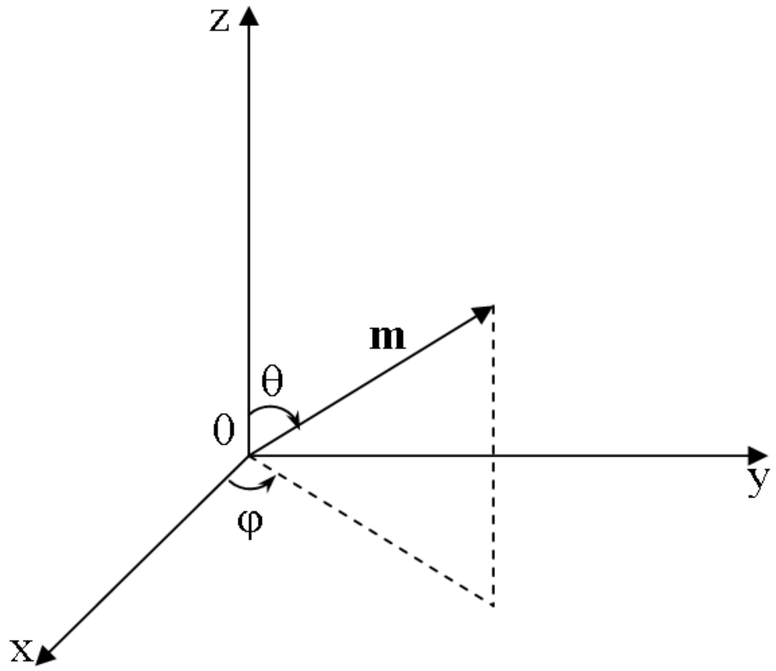


Рисунок 1.1 – Углы, определяющие вектор **m**: $0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi < 2\pi$

Заметим, что количество независимых переменных, от которых зависит функция E^h, в обоих случаях одинаково (на одинаковых сетках), поскольку координаты вектора **m** связаны равенством $(m^x)^2 + (m^y)^2 + (m^z)^2 = 1$.

Другой метод вычисления равновесия микромагнитной системы состоит в нахождении стационарного решения эволюционного уравнения (1.11) или (1.12) при условии, что на поверхности ферромагнетика выполняется равенство (1.10). Размагничивающее поле $\mathbf{H}_d$ вычисляется теми же методами, которые используются при минимизации функционала свободной энергии, приведённого в формуле (1.1). В отличие от этого подхода, решение уравнения Ландау-Лифшица предписывает вполне определенную траекторию эволюции системы. Исключением можно считать ситуации, когда система оказывается в точке лабильного равновесия. Неоднозначность в выборе направления выхода из такой точки согласуется с неоднозначностью направления эволюции моделируемой физической системы, находящейся в состоянии лабильного равновесия.

Еще одно отличие расчета устойчивого равновесного распределения намагниченности с помощью уравнения Ландау-Лифшица от решения этой задачи минимизацией функционала (1.1) состоит в наличии в уравнениях (1.11) – (1.12) безразмерного параметра λ. Этот параметр влияет на траекторию эволюции и при наличии у функционала (1.1) нескольких минимумов различные λ могут приводить систему из одного и того же начального состояния в разные равновесные состояния. В большинстве работ [8-45], в которых использовались уравнения (1.11) – (1.12), значения параметра λ не приводятся. В работах, где значения λ указаны, их разброс составляет от 0.001 до 1. В [8-10] проводились расчеты с целью выяснить влияние λ. Результаты исследований [8-9] показали, что влияние оказывается только на процесс перехода от неравновесного состояния к равновесному. В работе [10] сообщается об отсутствии заметного влияния на результаты расчетов по перемагничиванию системы частиц разных размеров внешним полем для значений $\lambda = 0.1$ и $\lambda = 1$. Эффект отсутствия влияния величины λ на конечное (равновесное) состояние в данном случае можно объяснить спецификой рассматриваемых задач. В работе [9] рассчитывалась эволюция системы после включения импульса внешнего поля, который и определял равновесную ориентацию поля намагниченности в пластинке (системе пластинок). Величина λ влияла только на скорость и характер перехода в равновесное состояние. Можно предположить, что и в работе [10] определяющим фактором перемагничивания каждой частицы являлась величина внешнего поля.

Расчеты, проведенные авторами настоящей работы, обнаружили ряд случаев, когда система в отсутствии внешнего поля из одного и того же начального состояния при различных λ приходит в разные равновесные состояния, что физически вполне объяснимо. Для приводимых ниже результатов исследований такая неоднозначность принципиального значения не имеет: во всех случаях важно было обнаружить равновесные состояния.

При численном моделировании уравнения (1.11) – (1.12) заменяются (аппроксимируются) дискретными аналогами. В случае использования метода конечных разностей простейшим дискретным аналогом является явная конечно-разностная схема, которая для уравнения (1.11) имеет вид [9]:

$$\mathbf{M}^{p+1} = \mathbf{M}^p - \Delta t\left(|\gamma'|\mathbf{M}^p \times \mathbf{H}_{eff}^p - \frac{\lambda|\gamma'|}{M_s}\mathbf{M}^p \times \left(\mathbf{M}^p \times \mathbf{H}_{eff}^p\right)\right), \tag{1.16}$$

где $\Delta t = t_{p+1} - t_p$ - временной шаг, p – индекс временного слоя. Индексы пространственных узлов (ячеек) здесь опущены. Простейшую аппроксимацию граничного условия (1.10) при $K_s = 0$ можно записать, если заменить производную по направлению односторонним разностным отношением с первым порядком аппроксимации по пространственному шагу сетки:

$$\mathbf{M}_B^p = \mathbf{M}_{B-1}^p, \tag{1.17}$$

где B – сеточный узел, расположенный на границе, а B-1 – ближайший к нему внутренний узел. Таким образом, по известным значениям $\mathbf{M}^p$ по формуле (1.16) вычисляются значения $\mathbf{M}^{p+1}$ на следующем временном слое во внутренних узлах, а затем по формуле (1.17) $\mathbf{M}^{p+1}$ из приграничных узлов переносятся на границу. На новом временном слое проводится нормирование векторного поля так, чтобы длина векторов сохранялась: $\left|\mathbf{M}^{p+1}\right| = M_s$.

В работе [11] для решения уравнения (1.11) использовалась схема «предиктор-корректор», в которой предварительное значение намагниченности на верхнем временном слое $\mathbf{M}^*$ рассчитывалось по схеме (1.16):
$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^p - \Delta t\left(|\gamma'|\mathbf{M}^p \times \mathbf{H}_{eff}^p + \frac{\lambda|\gamma'|}{M_s}\mathbf{M}^p \times \left(\mathbf{M}^p \times \mathbf{H}_{eff}^p\right)\right)$, а затем уточнялось
$\mathbf{M}^{p+1} = \mathbf{M}^p - \Delta t\left(|\gamma'|\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M}^*) + \frac{\lambda|\gamma'|}{M_s}\mathbf{M}^* \times \left(\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M}^*)\right)\right)$.

В работах [8,9,12] представлены неявные конечно-разностные схемы для уравнения (1.11), причем в [8,9] проведен сравнительный анализ эффективности явной и неявной схем. Вывод, сделанный в работе [9], состоит в следующем. Поскольку неявная схема позволяет использовать больший временной шаг Δt по сравнению с явной, ее применение является предпочтительным для анализа стационарных (равновесных) состояний. При анализе переходных процессов неявная схема может конкурировать с явной.

Сравнительные расчеты равновесных доменных структур в бесконечно длинном стержне при $\lambda = 0.15$, проведенные авторами настоящей работы (см. главу

2), не выявили преимуществ неявной схемы по сравнению с явной. Противоречие с результатами работы [9] можно объяснить разными методами вычисления размагничивающего поля $\mathbf{H}_d$. На рисунке 1.2 показана полученная в [9] зависимость x-компоненты намагниченности пластинки $\langle \mathbf{M}_x \rangle$ от времени при перемагничивании ее встречным полем. Видно, что при $\lambda < 0.2$ система приходит к равновесному состоянию в режиме колебаний. Авторы статьи отмечают, что при увеличении временного шага Δt от 0.15 нс до максимально допустимого счетной устойчивостью, колебательный режим возникает для всех приведенных на рисунке значений параметра λ. Таким образом, при большом временном шаге (из-за которого и используются неявные схемы), позволяющем достигать равновесное состояние за относительно малое число шагов, поле $\mathbf{M}$ существенно изменяется за один временной шаг.

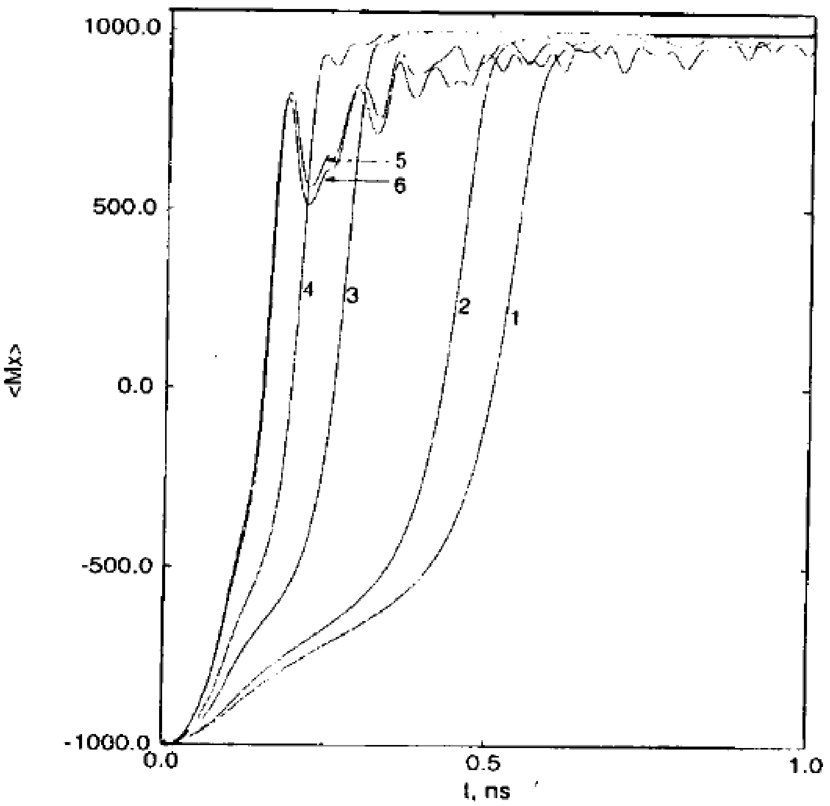


Рисунок 1.2 – Расчет процесса перемагничивания пластинки с применением неявной схемы с временным шагом $\Delta t = 0.15\text{ns}$ представленный в работе [9] для различных значений параметра λ: (1) - $\lambda = 1$; (2) - $\lambda = 0.5$; (3) - $\lambda = 0.2$; (4) - $\lambda = 0.1$; (5) - $\lambda = 0.01$; (6) - $\lambda = 0.001$.

Колебательный процесс усиливает это изменение. В работе [9] размагничивающее поле $\mathbf{H}_d$ вычислялось как сумма вклада сеточных ячеек, и количество арифметических операций, затраченных на вычисление $\mathbf{H}_d$, не зависело от изменения поля $\mathbf{M}$ за временной шаг.

В расчетах полей намагниченности в бесконечно длинном стержне, проведенных авторами настоящей работы, поле $\mathbf{H}_d = -\nabla u$ вычислялось итерационным методом, при котором скалярный потенциал u на временном слое p использовался в качестве начального приближения для вычисления u на слое p+1. При использовании явной схемы поле $\mathbf{M}$ (и, следовательно, потенциал u) мало изменяется за малый временной шаг, и значение u на временном слое p является хорошим начальным приближением для вычисления u на слое p+1. В результате уменьшение числа итераций для вычисления u и меньшее число арифметических операций для вычисления $\mathbf{M}^{p+1}$ при использовании явной схемы компенсирует преимущество неявной в ее возможности использовать больший временной шаг.

1.2 Методы вычисления размагничивающего поля

Потенциал размагничивающего поля можно найти решением задачи (1.13-1.14) или вычислением интеграла (1.15). При микромагнитном моделировании используются оба подхода, а также их комбинации. Рассмотрим методы решения задачи (1.13-1.14).

Необходимость решения уравнения Пуассона возникает во многих разделах физики, и различные методы его численного решения были разработаны еще во времена ручного счета [47]. Методы численного решения уравнения Пуассона описаны также в [48-49], однако разработка эффективных методов решения задачи (1.13-1.14) до сих пор актуальна из-за некоторых особенностей. Равенство (1.14) часто называют граничным условием, но исходя из (1.13) правильнее было бы его назвать внутренним. Если, для наглядности, считать потенциал функцией двух координат $u = u(x, y)$, то графически u будет непрерывной поверхностью в обычном трехмерном физическом пространстве над координатной плоскостью xy. В точках

(x, y), соответствующих границе ферромагнетика, при $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, на потенциальной поверхности будет излом. В этих точках функция $u = u(x, y)$ не дифференцируема, и выражение Δu не определено (в обычном смысле). Другая особенность – в неопределенности границы расчетной области для потенциала и условия на ней.

Один из методов задания места расположения расчетной границы и значений функции u на ней описан в [50] и назван авторами мультисеточным (multigrid) методом. Он состоит в следующем. Если при удалении от ферромагнетика (системы ферромагнетиков) поле $\mathbf{H}_d$ стремится к нулю, то это означает, что его потенциал u можно считать равным нулю на бесконечности. Данное предположение всегда справедливо для систем конечных размеров, а в ряде случаев и для бесконечных систем. Начальная расчетная область для функции u выбирается достаточно большой по сравнению с размером системы, и система помещается в центр расчетной области. Расчетная область покрывается крупной сеткой, и на границе области задается условие $u = 0$. Проводится расчет поля u внутри области и выбирается новая расчетная область, расположенная внутри начальной. Граница новой области также располагается в пустом пространстве и приближается к границе ферромагнетика. Сетка в новой области измельчается, и найденное на крупной сетке решение проектируется на мелкую как внутри новой области, так и на ее границе. Процесс приближения границы расчетной области к границе ферромагнетика и измельчение сетки может быть продолжен. Естественно, что для реализации этого метода как-то должен быть решен вопрос с особенностью (1.14) для уравнения Пуассона на границе ферромагнетика, которая располагается внутри расчетной области.

Другой метод вычисления потенциала, использующий решение задачи (1.13-1.14), изложен в [51-52] и назван авторами гибридным методом. Согласно этому методу потенциал представляется в виде суммы двух слагаемых: $u = u_1 + u_2$. Слагаемое u_1 находится из решения уравнения Пуассона с граничным условием Неймана на границе ферромагнетика, а слагаемое u_2 - из решения уравнения Лапласа с граничным условием Дирихле на той же границе. При решении последней задачи значение функции u_2 на границе системы находится по интегральной формуле. В пустом пространстве функция u не вычисляется.

В ряде работ потенциал вычисляется с помощью интегральной формулы (1.15) или по формуле

$$u = \iiint\limits_V \mathbf{M} \cdot \nabla \left| \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \right|^{-1} dV, \tag{1.18}$$

которую можно получить из формулы (1.15) заменой поверхностного интеграла объемным по теореме Гаусса. В некоторых работах (например, [9,53]) вместо функции u сразу вычисляют напряженность поля $\mathbf{H}_d$ как сумму вклада отдельных ячеек. Иногда энергию системы в собственном поле вычисляют с помощью векторного потенциала. Одна из причин использования векторного потенциала связана с особенностью минимизации функционала свободной энергии, которая рассматривается в главе 2, раздел 2.1.

В настоящей работе при вычислении скалярного потенциала и производных от скалярного потенциала использовались элементы всех перечисленных выше методов, а также разложение решения по собственным векторам дискретного аналога оператора Лапласа. Это делалось потому, что эффективность различных методов зависит от вида решаемых задач.

В заключение главы следует отметить, что эффективное вычисление размагничивающего поля является основным фактором эффективности вычислительного алгоритма в целом.

Глава 2 Численное моделирование полей намагниченности в монокристаллах бесконечной длины

2.1 Влияние метода минимизации функционала свободной энергии на результаты микромагнитного моделирования

Большинство используемых методов вычисления полей намагниченностей в микромагнитных системах используют метод минимизации дискретного аналога функционала свободной энергии. Чаще всего при решении таких задач используются методы градиентов [54], в основе которых лежит вычисление частных производных. Частные производные находятся в пространстве нескольких независимых переменных, в качестве которых используются либо параметры вектора намагниченности **M**, либо определяющие ориентацию этого вектора углы. Вычисление частных производных сопряжено с известными трудностями в случаях, если зависимость функционала от векторного поля **M** неявна и определяется посредством потенциала собственного поля. Такая ситуация наблюдается в случаях, когда потенциал размагничивающего поля задаётся уравнением Пуассона.

Многие авторы [50, 55-60] сообщают, об особых точках, встречающихся при решении задач методом функционала. Эти точки часто называют "седловыми " или "бифуркационными". Иными словами такие точки являются точками лабильного равновесия. Для выхода из этих точек в [50] использовалось уравнение Ландау-Лифшица, в [55] – возмущение векторного поля. В работе [56] авторы связали появление «седловых точек» с использованием скалярного потенциала и для нахождения энергии системы в собственном поле вычисляли векторный потенциал.

В седловых точках первая вариация функционала должна обращаться в нуль и, следовательно, правая часть уравнения Ландау-Лифшица (1.11) также равняться нулю. Это означает, что уравнение (1.11) не должно помогать в выходе из седловых точек. Во многих случаях нетрудно указать примеры однородных полей намагниченности, которые соответствуют седловым точкам функционала, но попадание в седловые точки в процессе численной минимизации представляется довольно странным.

В настоящей работе показано, что в случае применения градиентных методов без учета неявной зависимости функционала от поля намагниченности в качестве решений метода находятся не являющиеся локальными минимумами точки, в которых функционал растёт при произвольном смещении в направлении, противоположном вычисленному указанным способом «градиенту». Следует заметить, что эти точки относительно легко исключаются, если в процессе вычисления частных производных учесть, что зависимость функционала от поля вектора **M** неявна. Весьма вероятно, что чаще всего такие особенности ошибочно называют «седловыми точками». Очевидно, что они не являются о седловыми точками функционала, а их появление является следствием неудачного выбора направления градиентного спуска.

Приведём пример расчетного метода в качестве решения «задачи о распределении намагниченности в монокристаллической призме бесконечной высоты с квадратным поперечным сечением» [61-64]. Введем переменную L, обозначающую характерный линейный размер системы. Обратимся к уравнению (1.1) и разделим левую и правую его части на параметр $M_s^2 L^3$, имеющий размерность энергии, получим свободную энергию системы в безразмерном виде W (выраженную в единицах $M_s^2 L^3$):

$$W = \frac{E}{M_s^2 L^3} = \iiint_V \left\{ \frac{A}{M_s^2 L^2} \left[\left(\nabla m^x\right)^2 + \left(\nabla m^y\right)^2 + \left(\nabla m^z\right)^2 \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{K_1}{M_s^2} \left(1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{m})^2\right) + \frac{K_2}{M_s^2} \left(1 - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{m})^2\right)^2 \right] + \frac{1}{2} \mathbf{m} \cdot \nabla U - \mathbf{m} \cdot \mathbf{h}_{ext} \right\} dV + \tag{2.1}$$
$$+ \iint_S \frac{K_s}{2 M_s^2 L} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n})^2 dS.$$

Здесь области интегрирования V и S выражены в единицах L^3 и L^2 соответственно, а координаты – в единицах L; $U = \dfrac{u}{M_S L}$ - безразмерный потенциал; $\mathbf{h}_{ext} = \mathbf{H}_{ext} / M_S$. Формулы (1.13-1.14) и (1.15) для U принимают вид:

$$\Delta U = \begin{cases} 4\pi \nabla \cdot \mathbf{m} & \text{внутри магнетика} \\ 0 & \text{вне магнетика} \end{cases}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial U}{\partial(-\mathbf{n})} = -4\pi\, \mathbf{m}\cdot\mathbf{n} \text{ на границе магнетика} \tag{2.3}$$

и

$$U(\mathbf{r}_0) = \iiint\limits_V -\nabla\cdot\mathbf{m}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|dV + \iint\limits_S \mathbf{m}\cdot\mathbf{n}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|dS \tag{2.4}$$

соответственно. Безразмерные составляющие энергии W будем также обозначать буквой W с сохранением индексов выражения (1.1): $W = W_e + W_a + W_d + W_{ext} + W_s$.

Выберем в качестве характерного линейного размера системы величину L, равную стороне квадрата, тогда безразмерное поперечное сечение будет квадратом $\mathbf{D} = 1\times 1$, показанным на рисунке 2.1. Начало координат расположено в нижнем левом углу области $\mathbf{D}$. Предполагается, что ось z ортогональна сечению, а компоненты единичного вектора намагниченности m^x, m^y и m^z зависят только от координат x и y. Отсюда следует, что потенциал U также зависит только от этих координат. Предполагается отсутствие поверхностной анизотропии, т.е. $K_s = 0$. Функционал (2.1) в этом случае запишется в виде:

$$\begin{aligned} W = \iint\limits_{\mathbf{D}} \Bigg\{ &\frac{E}{M_s^2 L^2}\left[\left(\nabla m^x\right)^2 + \left(\nabla m^y\right)^2 + \left(\nabla m^z\right)^2\right] + \\ &+\left[\frac{K_1}{M_s^2}\left(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right) + \frac{K_2}{M_s^2}\left(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right)^2\right] + \frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\nabla U - \mathbf{m}\cdot\mathbf{h}_{ext}\Bigg\} dxdy \end{aligned}, \tag{2.5}$$

а вид формул (2.2)-(2.4) не изменится. Рассмотрим минимизацию дискретного аналога (2.5) методом градиентного спуска при вычислении потенциала размагничивающего поля путем решения задачи (2.2)-(2.3).

Покроем координатную плоскость Oxy равномерной сеткой с шагом h (рисунок 2.1). При построении дискретного аналога для функционала (2.5) возможные вариации в построении дискретных аналогов для составляющих W_e, W_a и W_{ext} существенного значения не имеют. Поэтому рассмотрим только построение дискретного аналога для энергии системы в размагничивающем поле W_d, которую можно записать:

$$W_d = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathbf{D}} \mathbf{m}\cdot\nabla U dxdy = W_d^h + O(h^2),$$ где W_d^h - дискретный аналог W_d:

$$W_d^h = \frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(m_{i,j}^x \nabla_{i,j}^x(U) + m_{i,j}^y \nabla_{i,j}^y(U)). \qquad (2.6)$$

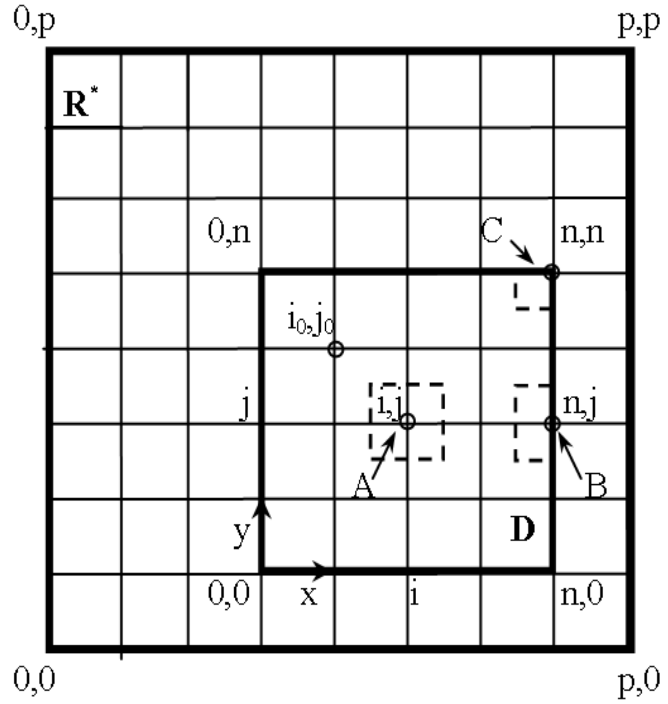


Рисунок 2.1 – Координатная плоскость с областями **D** и **R*.** Типы узлов:: А- внутренний узел, В – регулярный граничный узел, С – угловой узел. Центр области **R*** – узел i_0, j_0.

Здесь (i, j), i=0, 1, …, n; j=0, 1, …, n - номера узлов сетки в области поиска решения **D**; $m_{i,j}^x$, $m_{i,j}^y$ - компоненты вектора намагниченности **m** в узле (i, j) разностной сетки; $\nabla_{i,j}^x(U), \nabla_{i,j}^y(U)$ - аппроксимация произведения производной от потенциала U в узле (i, j) на долю ячейки d в области **D**. В модели имеются три типа узлов, изображенных на рисунке 2.1. Для внутреннего узла (А), производные аппроксимируются центральной разностью при d=1. Для регулярного неуглового узла (В) производная аппроксимируется левой или правой разностью, для производной на границе выбирается центральная разность при d=0.5. В угловых узлах (С) для обоих координат выбирается левая или правая разность, при d=0.25. На на рисунке 2.1 приведены примеры аппроксимаций:

$$\nabla_{i,j}^x(U) = \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2h}, 0 < \mathrm{i} < \mathrm{n}, 0 < \mathrm{j} < \mathrm{n};$$

$$\nabla_{n,j}^x(U) = \frac{U_{n,j} - U_{n-1,j}}{2h},\ 0 < \mathrm{j} < \mathrm{n};$$

$$\nabla_{n,n}^x(U) = \frac{U_{n,n} - U_{n-1,n}}{4h}.$$

Компонента $m_{i,j}^z$ в выражении (2.6) отсутствует поскольку $\nabla_{i,j}^z(U)=0$, но она входит в другие составляющие W^h – дискретного аналога W. Таким образом, W^h является функцией $3(\mathrm{n}+1)^2$ переменных $m_{i,j}^x$, $m_{i,j}^y$, $m_{i,j}^z$, связанных равенством $(m_{i,j}^x)^2+(m_{i,j}^y)^2+(m_{i,j}^z)^2=1$. Аппроксимационные выражения для вектора **m** выражаются посредством углов θ и φ (рисунок 2.1):

$$m_{i,j}^x=\sin\theta_{i,j}\cos\varphi_{i,j},\ m_{i,j}^y=\sin\theta_{i,j}\sin\varphi_{i,j},\ m_{i,j}^z=\cos\theta_{i,j}. \tag{2.7}$$

Такая подстановка позволяет получить для W^h (и для W_d^h) выражения являющиеся функциями 2 $(n+1)^2$ независимых переменных $\varphi_{i,j}$ и $\theta_{i,j}$.

Градиентный спуск осуществляется с помощью вычисления вектора ∇W_d^h, посредством частных производных $\left(W_d^h\right)'_{\theta_{i,j}}$ и $\left(W_d^h\right)'_{\varphi_{i,j}}$.

Для любого узла сетки *(i₀, j₀)* в области **D** с помощью (2.6) и (2.7) можно получить:

$$\begin{gathered}\left(W_d^h\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}=\frac{h^2}{2}\left\{-m_{i_0,j_0}^y\nabla_{i_0,j_0}^x(U)+m_{i_0,j_0}^x\nabla_{i_0,j_0}^y(U)+\right.\\ \left.+\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left[m_{i,j}^x\left(\nabla_{i,j}^x(U)\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}+m_{i,j}^y\left(\nabla_{i,j}^y(U)\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right]\right\},\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}\left(W_d^h\right)'_{\theta_{i_0,j_0}}=\left\{\frac{h^2}{2}\cos\theta_{i_0,j_0}\left[\cos\varphi_{i_0,j_0}\nabla_{i_0,j_0}^x(U)+\sin\varphi_{i_0,j_0}\nabla_{i_0,j_0}^y(U)\right]+\right.\\ \left.+\frac{h^2}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left[m_{i,j}^x\left(\nabla_{i,j}^x(U)\right)'_{\theta_{i_0,j_0}}+m_{i,j}^y\left(\nabla_{i,j}^y(U)\right)'_{\theta_{i_0,j_0}}\right]\right\}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Отметим что изменение φ и θ в одной точке влечёт за собой изменение потенциала U во всей области **D**. Таким образом получаем выражение для вычисления $U_{i,j}$, входящей в (2.6), (2.8) и (2.9).

В гауссовой системе при отсутствии внешнего поля индукция **B** намагниченность, **M** и напряженность собственного поля $\mathbf{H}_d$ связаны соотношением:

$$\mathbf{B}=\mathbf{H}_d+4\pi\mathbf{M}, \tag{2.10}$$

где вектор намагниченности скачкообразно $\mathbf{M}$ изменяется до $\mathbf{0}$ на линии пересечения границы рассматриваемой области **D**, создавая особенность при вычислении потенциала. Предположим, что поле $\mathbf{M}$ уменьшающимся до $\mathbf{0}$ не скачком, а в малом слое δ непрерывно и плавно (функция $\nabla \cdot \mathbf{M}$ существует и непрерывна в любой точке пространства). Это означает, что в слое толщиной δ модуль вектора $\mathbf{M}$ плавно изменяется от M_s до нуля. Выразив поле $\mathbf{H}_d$ через его потенциал, с учётом соленоидальности вектора $\mathbf{B}$, получаем выражение для вычисления дивергенции:

$$\nabla \cdot \nabla u = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{M}. \qquad (2.11)$$

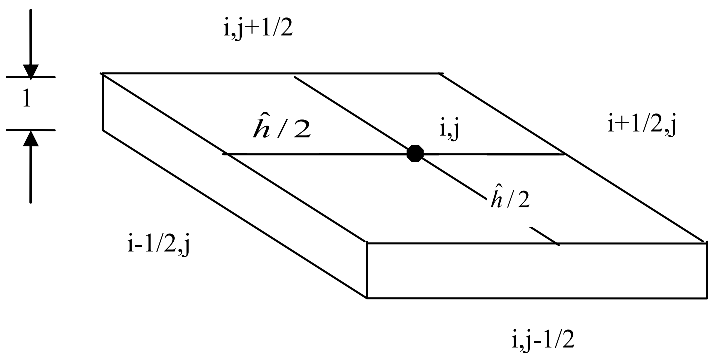


Рисунок 2.2 – Объемная ячейка размером $\hat{h} \times \hat{h} \times 1$ с центром в точке (i, j).

Пусть $\hat{h} \times \hat{h} \times 1$ (рисунок 2.2) – объемная ячейка с центром в точке (i, j), где (i, j) - произвольный узел сетки, где $\hat{h}$ - шаг сетки в размерных единицах (в см). Проинтегрировав выражение (2.11) по объему ячейки и заменив по теореме Гаусса объемные интегралы поверхностными, получаем:

$$\iint_{S_h} \nabla u \cdot \mathbf{n}_h dS = 4\pi \iint_{S_h} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}_h dS, \qquad (2.12)$$

где S_h - поверхность ячейки, $\mathbf{n}_h$ – единичный внешний нормальный вектор на поверхности S_h. Предполагая $\partial U / \partial z = 0$ и $\partial \mathbf{m} / \partial z = \mathbf{0}$ (что эквивалентно $\partial u / \partial z = 0$ и $\partial \mathbf{M} / \partial z = \mathbf{0}$) получаем нелевое значение интеграла в левой части выражения (2.12) и по верхней и по нижней поверхности пластинки. В правой части равна нулю сумма интегралов по верхней и нижней поверхностям. Таким образом, при вычислении (2.12) достаточно ограничиться боковой поверхностью ячейки.

Рассмотрим произвольный сеточный узел (i, j) внутри области **D**. После замены интегралов в выражении (2.12) на их дискретные аналоги получаем:

$$\Delta_{i,j}^h(u) = 2\pi\hat{h}(M_{i+1,j}^x - M_{i-1,j}^x + M_{i,j+1}^y - M_{i,j-1}^y), \qquad (2.13)$$

где $\Delta_{i,j}^h(u) = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$. (2.14)

Обозначим $\Delta_{i,j}^h$ сеточную функцию, соответствующую выражению (2.14). При расположении ячейки с индексами (i,j) в пустом пространстве дискретный аналог интеграла в выражении (2.12) принимает вид:

$$\Delta_{i,j}^h(u) = 0. \qquad (2.15)$$

Рассмотрим точки, расположенные на правой границе области поиска решения **D** (то есть, узлы (n,j), $1 \le j \le n-1$). В этих узлах подынтегральная функция, задаваемая выражением (2.12) справа, не равна нулю в правой половине ячейки в двух прямоугольных зонах размером $1\times\delta$ на фронтальной и тыловой гранях ячейки, то есть, там, где вектор $\mathbf{M} \ne \mathbf{0}$. Модуль интеграла по этим зонам меньше либо равен $2\delta M_s$. Следовательно, в случае предельного перехода, когда ширина переходной зоны $\delta \to 0$, интеграл в правой части выражения (2.12) стремится к нулю в правой половине ячейки. Очевидно, аппроксимация выражения (2.12) для правой границы ячейки принимает вид:

$$\Delta_{n,j}^h(u) = \pi\hat{h}(-2(M_{n,j}^x + M_{n-1,j}^x) + M_{n,j+1}^y - M_{n,j-1}^y), \qquad (2.16)$$

где $1 \le j \le n-1$.

При записи выражений (2.10) – (2.12) мы отказались от безразмерной формы для обеспечения существования и непрерывности функции $\nabla\cdot\mathbf{M}$ в бесконечном пространстве. Выражения (2.13), (2.15) и (2.16) допускают безразмерную запись, если каждый член выражения разделить LM_s (этот член имеет размерность потенциала u):

$$\Delta_{i,j}^h(U) = 2\pi h(m_{i+1,j}^x - m_{i-1,j}^x + m_{i,j+1}^y - m_{i,j-1}^y), \qquad (2.13')$$

где (i,j) - внутренние узлы области **D**;

$$\Delta_{i,j}^h(U) = 0, \qquad (2.15')$$

где (i,j) - узлы в пустом пространстве;

$$\Delta_{n,j}^h(U) = \pi h(-2(m_{n,j}^x + m_{n-1,j}^x) + m_{n,j+1}^y - m_{n,j-1}^y), \qquad (2.16')$$

где $1 \le j \le n-1$.

В уравнениях (2.13’) и (2.16’) учтено, что во всех узлах сетки, присутствующих в правых частях уравнений (2.13) и (2.16), модуль вектора **M** равен M_s.

Аналогично формулам (2.13’), (2.15’) и (2.16’) можно построить дискретные аналоги для других регулярных граничных и угловых точек области **D**:

$$\Delta_{0,j}^h(U) = \pi h(2(m_{0,j}^x + m_{1,j}^x) + m_{0,j+1}^y - m_{0,j-1}^y), \text{ где } 1 \le j \le n-1;$$

$$\Delta_{i,n}^h(U) = \pi h(m_{i+1,n}^x - m_{i-1,n}^x - 2(m_{i,n}^y + m_{i,n-1}^y), \text{ где } 1 \le i \le n-1;$$

$$\Delta_{i,0}^h(U) = \pi h(m_{i+1,0}^x - m_{i-1,0}^x + 2(m_{i,0}^y + m_{i,1}^y), \text{ где } 1 \le i \le n-1;$$

$$\Delta_{n,n}^h(U) = -\pi h(m_{n,n}^x + m_{n-1,n}^x + m_{n,n}^y + m_{n,n-1}^y); \tag{2.17}$$

$$\Delta_{0,0}^h(U) = \pi h(m_{0,0}^x + m_{1,0}^x + m_{0,0}^y + m_{0,1}^y);$$

$$\Delta_{n,0}^h(U) = \pi h(-m_{n-1,0}^x - m_{n,0}^x + m_{n,1}^y + m_{n,0}^y);$$

$$\Delta_{0,n}^h(U) = \pi h(m_{0,n}^x + m_{1,n}^x - m_{0,n-1}^y - m_{0,n}^y).$$

Выражения (2.13’) - (2.16’) и (2.17) принимают вид:

$$\Delta_{i,j}^h(U) = -4\pi h^2 F_{i,j}, \tag{2.18}$$

где (i,j) - произвольный узел сетки на плоскости *xy*. Отметим, что вектор **m** равен нуль-векторы во всех узлах сетки, расположенных вне магнетика.

Выражение (2.18) является дискретным приближением соотношение (2.2) с порядком $O(h^2)$ как внутри, так и снаружи области поиска решения ***D.*** Условие (2.3) аппроксимирует уравнение (2.2) с порядком $O(h)$ в неугловых точках граней. Сеточная функция $F_{i,j}$ в правой части выражения (2.18) в соответствие с теорией потенциала [7] является дискретным аналогом объемной плотности источника потенциала. Причем, если внутри области **D** функция $F_{i,j}$ является обычной аппроксимацией объемного источника $-\nabla \cdot \mathrm{m}$, то на ее границах $F_{i,j}$ - эффективный источник, учитывающий поверхностный источник с плотностью $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$.

Получим уравнение для вычисления входящих в правые части (2.8) и (2.9) $(U_{i,j})'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ и $(U_{i,j})'_{\theta_{i_0,j_0}}$ - производных сеточной функции $U_{i,j}$ по углам φ_{i_0,j_0} и

θ_{i_0,j_0}, определяющим ориентацию вектора **m** в точке (i_0, j_0). Начнем с $\left(U_{i,j}\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}$.

Пусть (i_0, j_0) любой узел, расположенный внутри области **D** на расстоянии не ближе $2h$ к границе **D**. Точка (i_0, j_0) и четыре ближайших точки, расположенных на расстоянии h от (i_0, j_0) (рисунок 2.3), являются внутренними для области **D.** Поэтому сеточное уравнение (2.18) в этих пяти точках имеет вид (2.13'). Если индексы узлов расчетной сетки (i, j) в уравнении (2.18) будут изменяться по всей координатной плоскости *xy,* то узел (i_0, j_0) попадет в правую часть (2.18) только в четырех точках, ближайших к (i_0, j_0): (i_0-1, j_0), (i_0+1, j_0), (i_0, j_0-1) и (i_0, j_0+1).

Для точки (i_0-1, j_0) уравнение (2.13') (или (2.18)) в развернутом виде запишется:

$$\Delta^h_{i_0-1,j_0}(U) = U_{i_0-2,j_0} + U_{i_0,j_0} + U_{i_0-1,j_0-1} + U_{i_0-1,j_0+1} - 4U_{i_0-1,j_0} =$$

$$= 2\pi h(m^x_{i_0,j_0} - m^x_{i_0-2,j_0} + m^y_{i_0-1,j_0+1} - m^y_{i_0-1,j_0-1}). \qquad (2.19)$$

Дифференцирование равенства (2.19) по переменной φ_{i_0,j_0} с учетом (2.7) дает:

$$\Delta^h_{i_0-1,j_0}\left(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right) = U'_{i_0-2,j_0} + U'_{i_0,j_0} + U'_{i_0-1,j_0-1} + U'_{i_0-1,j_0+1} - 4U'_{i_0-1,j_0} =$$

$$= -2\pi h \sin\theta_{i_0,j_0} \sin\varphi_{i_0,j_0} = -2\pi h m^y_{i_0,j_0}, \qquad (2.20)$$

где использовано обозначение $U'_{i,j} \equiv \left(U_{i,j}\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}$. Аналогично для остальных трех точек получаем:

$$\Delta^h_{i_0+1,j_0}\left(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right) = 2\pi h m^y_{i_0,j_0}; \quad \Delta^h_{i_0,j_0-1}\left(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right) = 2\pi h m^x_{i_0,j_0};$$
$$\Delta^h_{i_0,j_0+1}\left(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right) = -2\pi h m^x_{i_0,j_0}. \qquad (2.20')$$

Если узлы (i, j) в уравнении (2.18) не совпадают с четверкой ближайших к (i_0, j_0), то правая часть (2.18) не зависит от переменной φ_{i_0,j_0}, и в этих узлах производная $\left(U_{i,j}\right)'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ будет удовлетворять уравнению $\Delta^h_{i,j}(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}) = 0$.

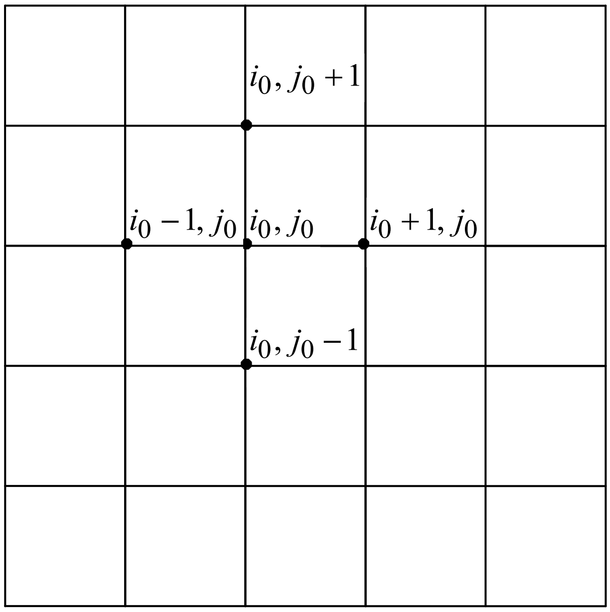


Рисунок 2.3 – Расположение точек (i_0, j_0), (i_0+1, j_0), (i_0-1, j_0), (i_0, j_0+1) и (i_0, j_0-1) в области **D**.

Ограничение на расположение узла (i_0, j_0) не ближе $2h$ к границе **D** принималось для того, чтобы 4 ближайших к (i_0, j_0) сеточных узла лежали внутри области **D**, что сохраняет вид правой части (2.18), которая для внутренних узлов имеет вид правой части (2.13’). Однако это ограничение оказывается излишним. Если узел (i_0, j_0) выбрать на расстоянии h от левой границы **D** так, что $(i_0, j_0) = (1, j_0)$, $2 \le j_0 \le n-2$, то левая от узла точка $(0, j_0)$ будет граничной. Правая часть уравнения (2.18) в четырех точках, ближайших к $(1, j_0)$, будет иметь не одинаковый вид. В трех внутренних для **D** узлах $(2, j_0)$, $(1, j_0-1)$ и $(1, j_0+1)$ правая часть уравнения (2.18) совпадает с правой частью (2.13’), и сеточные уравнения для вычисления производной $U'\varphi_{1,j_0}$ совпадут с уравнениями (2.20’) при $i_0 = 1$. В левой (граничной) точке $(0, j_0)$ правая часть уравнения (2.18) совпадает с правой частью первого уравнения в (2.17), и уравнение (2.18) принимает вид: $\Delta^h_{0,j_0}(U) = \pi h(2(m^x_{0,j_0} + m^x_{1,j_0}) + m^y_{0,j_0+1} - m^y_{0,j_0-1})$. Дифференцирование этого уравнения по переменной φ_{1,j_0}, от которой в правой части зависит компонента m^x_{1,j_0}, дает уравнение $\Delta^h_{0,j_0}\left(U'\varphi_{1,j_0}\right) = -2\pi h m^y_{1,j_0}$, которое совпадает с уравнением для левой точки (2.20) при $i_0 = 1$. Таким образом, уравнения (2.20) - (2.20’) для вычисления производной от сеточной функции $U_{i,j}$ по независимой переменной φ_{i_0,j_0} оказываются справедливыми и для точек $\{(1,j_0):\ 2 \le j_0 \le n-2\}$, расположенных на расстоянии h от левой границы области **D**. Аналогичным путем устанавливается, что уравнениям (2.20) - (2.20') удовлетворяют производные $(U_{i,j})'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ во всех внутренних узлах (i_0, j_0) области **D**.

Если узел (i_0, j_0) расположен на левой границе **D** так, что $(i_0, j_0) = (0, j_0)$, $1 \le j_0 \le n-1$, то в соответствие с уравнениями (2.13'), (2.15'), (2.16') и (2.17) при изменении узлов расчетной сетки (i, j) в уравнении (2.18) по всей координатной плоскости *xy* правая часть (2.18) будет зависеть от φ_{0,j_0} только в следующих четырех точках: $(0, j_0)$, $(1, j_0)$, $(0, j_0-1)$ и $(0, j_0+1)$. Аналогично случаю внутренних точек получаем, что для узлов на левой границе производная $(U_{i,j})'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta^h_{0,j_0}\left(U'_{\varphi_{0,j_0}}\right) = -2\pi h m^y_{0,j_0};\ \Delta^h_{1,j_0}\left(U'_{\varphi_{0,j_0}}\right) = 2\pi h m^y_{0,j_0};$$

$$\Delta^h_{0,j_0-1}\left(U'_{\varphi_{0,j_0}}\right) = \pi h m^x_{0,j_0};\ \ \Delta^h_{0,j_0+1}\left(U'_{\varphi_{0,j_0}}\right) = -\pi h m^x_{0,j_0}.$$

Если (i, j) любой узел на координатной плоскости *xy*, кроме четырех, указанных выше, то $\Delta^h_{i,j}(U'_{\varphi_{0,j_0}}) = 0$.

Если $(i_0, j_0) = (0{,}0)$ - левый нижний узел области **D**, то правая часть (2.18) будет зависеть от $\varphi_{0,0}$ только в следующих трех точках: $(0{,}0)$, $(1{,}0)$, и $(0{,}1)$. Аналогично предыдущему производная $(U_{i,j})'_{\varphi_{0,0}}$ удовлетворяет уравнениям:

$$\Delta^h_{0,0}\left(U'_{\varphi_{0,0}}\right) = \pi h(m^x_{0,0} - m^y_{0,0});\ \ \Delta^h_{0,1}\left(U'_{\varphi_{0,0}}\right) = -\pi h m^x_{0,0};$$

$$\Delta^h_{1,0}\left(U'_{\varphi_{0,0}}\right) = \pi h m^y_{0,0}.$$

Если (i, j) любой узел на координатной плоскости *xy*, кроме трех, указанных выше, то $\Delta^h_{i,j}(U'_{\varphi_{0,0}}) = 0$.

Выше были приведены примеры построения сеточных уравнений для вычисления производной от сеточной функции $U_{i,j}$ по независимой переменной

φ_{i_0,j_0} для случаев, когда узел (i_0, j_0) находился внутри области **D**, в регулярных точках левой границы и в левом нижнем углу. Уравнения для других расположений узла (i_0, j_0), а также для производной от сеточной функции $U_{i,j}$ по переменной θ_{i_0,j_0} получаются аналогично. Полный перечень этих уравнений можно записать следующим образом:

$$\Delta^h_{i,j}\left(U'_{\varphi_{i_0,j_0}}\right) = q_{i,j};\ \Delta^h_{i,j}\left(U'_{\theta_{i_0,j_0}}\right) = g_{i,j}. \qquad (2.21)$$

Здесь $q_{i,j} = 0$ и $g_{i,j} = 0$ во всех точках кроме перечисленных ниже случаев. Например, если $0<i_0<n$, $0<j_0<n$, то $q_{i,j}$ и $g_{i,j}$ не равны нулю в следующих случаях:

$$q_{i_0-1,j_0} = -2Q_y;\quad q_{i_0+1,j_0} = 2Q_y;\quad q_{i_0,j_0-1} = 2Q_x;\quad q_{i_0,j_0+1} = -2Q_x;$$
$$g_{i_0-1,j_0} = 2G_C;\quad g_{i_0+1,j_0} = -2G_C;\quad g_{i_0,j_0-1} = 2G_S;\quad g_{i_0,j_0+1} = -2G_S.$$

Если $i_0 = n$, $0 < j_0 < n$, то:

$q_{i_0-1,j_0} = -2Q_y$; $q_{i_0,j_0} = 2Q_y$;

$q_{i_0,j_0-1} = Q_x$; $q_{i_0,j_0+1} = -Q_x$;

$g_{i_0-1,j_0} = 2G_C$; $g_{i_0,j_0} = -2G_C$;

$g_{i_0,j_0-1} = G_S$; $g_{i_0,j_0+1} = -G_S$.

Если $i_0 = 0$, $0 < j_0 < n$, то:

$q_{i_0+1,j_0} = 2Q_y$; $q_{i_0,j_0} = -2Q_y$;

$q_{i_0,j_0-1} = Q_x$; $q_{i_0,j_0+1} = -Q_x$;

$g_{i_0+1,j_0} = -2G_C$; $g_{i_0,j_0} = 2G_C$;

$g_{i_0,j_0-1} = G_S$; $g_{i_0,j_0+1} = -G_S$.

Если $0 < i_0 < n$, $j_0 = n$, то:

$q_{i_0-1,j_0} = -Q_y$; $q_{i_0+1,j_0} = Q_y$;

$q_{i_0,j_0-1} = 2Q_x$; $q_{i_0,j_0} = -2Q_x$;

$g_{i_0-1,j_0} = G_C$; $g_{i_0+1,j_0} = -G_C$;

$g_{i_0,j_0-1} = 2G_S$; $g_{i_0,j_0} = -2G_S$.

Если $0 < i_0 < n$, $j_0 = 0$, то:

$q_{i_0-1,j_0} = -Q_y$; $q_{i_0+1,j_0} = Q_y$;

$q_{i_0,j_0} = 2Q_x$; $q_{i_0,j_0+1} = -2Q_x$;

$g_{i_0-1,j_0} = G_C$; $g_{i_0+1,j_0} = -G_C$;

$g_{i_0,j_0} = 2G_S$; $g_{i_0,j_0+1} = -2G_S$.

Если $i_0 = 0$, $j_0 = n$, то:

$q_{i_0,j_0} = -Q_x - Q_y$; $q_{i_0,j_0-1} = Q_x$;

$q_{i_0+1,j_0} = Q_y$;

$g_{i_0,j_0} = G_C - G_S$; $g_{i_0+1,j_0} = -G_C$;

$g_{i_0,j_0-1} = G_S$.

Если $i_0 = n$, $j_0 = 0$, то:

$q_{i_0,j_0} = Q_x + Q_y$; $q_{i_0,j_0+1} = -Q_x$;

$q_{i_0-1,j_0} = -Q_y$;

$g_{i_0,j_0} = G_S - G_C$; $g_{i_0-1,j_0} = G_C$;

$g_{i_0,j_0+1} = -G_S$.

Здесь: $Q_x = \pi h m^x_{i_0,j_0}$; $Q_y = \pi h m^y_{i_0,j_0}$; $G_S = \pi h \cos\theta_{i_0,j_0} \sin\varphi_{i_0,j_0}$; $G_C = \pi h \cos\theta_{i_0,j_0} \cos\varphi_{i_0,j_0}$.

Система уравнений (2.18) является задачей Дирихле. Для её решения выделим контур R снаружи области **D** на некотором расстоянии её границы. Пусть контур будет границей квадрата, включающего в себя область **D.** Обозначим (i_R,j_R) узловые точки контура R. В этих точках потенциал U задаётся выражением:

$$U_{i_R,j_R} = -h^2 \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} F_{i,j} \ln\left[\left(x_i - x_{i_R}\right)^2 + \left(y_j - y_{j_R}\right)^2\right], \qquad (2.22)$$

где x_i, y_j и x_{i_R}, y_{j_R} – обозначения координат узлов в области **D** и на выделенном контуре R соответственно. Выражение (2.22) представляет собой аппроксимацию логарифмического потенциала [65] для источника $F_{i,j}$, определяемого уравнениим (2.18). Если на границе контура U_{i_R,j_R} значения потенциала известны, то внутри, содержащего область **D** контура потенциал описывается функцией, являющейся решением уравнения (2.18). Это уравнение решается методом последовательной верхней релаксации. Аналогично можно находится решение уравнения (2.21), но в этом случае нахождение решения значительно облегчается, если выражения (2.21) определять в квадратной области **R***, центром которой является точка (i_0, j_0) (она изображена на рисунке 2.1). Так как область **R*** изменяет положение относительно области **D** при изменении положения точки (i_0, j_0) в области **D**, то источники потенциальных полей $U'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ и $U'_{\theta_{i_0,j_0}}$ локальны. Следовательно, при больших размерах области **R*** справедливы условия на её границе:

$$U'_{\theta_{i_0,j_0}} = U'_{\varphi_{i_0,j_0}} = 0. \qquad (2.23)$$

В [48] приводится точное решение уравнений (2.21) с граничными условиями (2.23). В векторной форме оно принимает вид:

$$\mathbf{U}' = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=1}^{p-1} \frac{\mathbf{u}^{kl} \cdot \mathbf{f}}{\left\|\mathbf{u}^{kl}\right\|_G^2 \cdot \lambda_{kl}} \mathbf{u}^{kl}, \qquad (2.24)$$

где **U'** и **f –** векторы, равные выражениям в левой и правой части уравнений (2.21) соответственно, P^2 – число ячеек в области **R*** (рисунок 2.1), $\mathbf{u}^{kl}$ – разностная аппроксимация полной ортогональной системы собственных функций оператора Лапласа Δ^h, которые обращаются в нуль на границе области **R***. В данных обозначениях верхний двойной индекс символизирует имя собственной функции.

λ_{kl} – собственное число функции $\mathbf{u}^{kl}$. Обозначим $\left\|\mathbf{u}^{kl}\right\|_G$ норму конечномерного гильбертова пространства со стандартным определением скалярного произведения. Для разных значений индексов решение уравнений (2.24) имеет вид:

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{для } 0<i_0<n,\ 0<j_0<n:\ U'_{i^*,j^*}=A^i_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^i_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } i_0=n,\ 0<j_0<n:\ U'_{i^*,j^*}=A^r_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^i_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } 0<i_0<n,\ j_0=n:\ U'_{i^*,j^*}=A^i_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^u_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } i_0=n,\ j_0=n:\ U'_{i^*,j^*}=A^r_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^u_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } i_0=0,\ j_0=n:\ U'_{i^*,j^*}=A^l_{i^*,j^*}f_{i_0+1,j_0}+B^u_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } i_0=0,\ 0<j_0<n:\ U'_{i^*,j^*}=A^l_{i^*,j^*}f_{i_0+1,j_0}+B^i_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0-1};\\
\text{для } 0<i_0<n,\ j_0=0:\ U'_{i^*,j^*}=A^i_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^d_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0+1};\\
\text{для } i_0=0,\ j_0=0:\ U'_{i^*,j^*}=A^l_{i^*,j^*}f_{i_0+1,j_0}+B^d_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0+1};\\
\text{для } i_0=n,\ j_0=0:\ U'_{i^*,j^*}=A^r_{i^*,j^*}f_{i_0-1,j_0}+B^d_{i^*,j^*}f_{i_0,j_0+1}.
\end{array}
\right\}
\qquad (2.25)
$$

В вышеприведённом выражении *(i^*, j^*)* - индексы узлов в квадратной области **R***, $0\le i^*\le P, 0\le j^*\le P$. Для первого уравнения из (2.21) U'_{i^*,j^*} – компоненты аппроксимационного потенциала $U'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ на сетке области **R***, а $f_{i,j}\equiv q_{i,\ j}$. Второе уравнение из (2.21) содержит U'_{i^*,j^*} - компоненты аппроксимационного потенциала $U'_{\theta_{i_0,j_0}}$, а $f_{i,j}\equiv g_{i,j}$. Для коэффициентов из (2.25) справедливы следующие выражения:

$$A^{i}_{i^*,j^*}=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{p}\sin\frac{l\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};$$

$$A^{r}_{i^*,j^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sin\frac{k\pi}{2}-\sin\left(\frac{k\pi(p-2)}{2p}\right)\right)\sin\frac{l\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};$$

$$A^{l}_{i^*,j^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sin\frac{k\pi}{2}-\sin\left(\frac{k\pi(p+2)}{2p}\right)\right)\sin\frac{l\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};$$

$$B^{u}_{i^*,j^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sin\frac{l\pi}{2}-\sin\left(\frac{l\pi(p-2)}{2p}\right)\right)\sin\frac{k\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};\qquad(2.26)$$

$$B^{d}_{i^*,j^*}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sin\frac{l\pi}{2}-\sin\left(\frac{l\pi(p+2)}{2p}\right)\right)\sin\frac{k\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};$$

$$B^{i}_{i^*,j^*}=\sum_{k=1}^{p-1}\sum_{l=1}^{p-1}\cos\frac{l\pi}{2}\sin\frac{l\pi}{p}\sin\frac{k\pi}{2}u^{kl}_{i^*,j^*};$$

$$u^{kl}_{i^*,j^*}=\frac{\frac{2}{p^2}\sin\left(\frac{\pi k i^*}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi l j^*}{p}\right)}{\sin^2\frac{k\pi}{2p}+\sin^2\frac{l\pi}{2p}}.$$

Формулы (2.25) для вычисления **U**' получены исходя из предположения, что потенциал удовлетворяет уравнению (2.18), и не зависят от метода решения уравнения (2.18). Изменение выражений (2.26) определяются только изменениями значения p, равного размеру квадрата **R*** в размерных единицах h, следовательно при достаточно больших значениях (2.26) достаточно вычислить лишь однократно. В дальнейшем эти значения могут быть использованы в расчетах потенциала **U**' в соответствии с соотношениями (2.25).

Вычисления были проведены с помощью минимизации функционала W^h в случае учёта неявной зависимости W^h от поля **m** и в случае отсутствия такой зависимости. При отсутствии зависимости правые части (2.8)-(2.9) равны нулю, в этом случае нет необходимости вычислять значения полей $U'_{\varphi_{i_0,j_0}}$ и $U'_{\theta_{i_0,j_0}}$. Следует отметить, что предлагаемый метод в ряде случаев не проявляет заметных отличий от вычислений без учёта неявной зависимости. Впрочем, в некоторых случаях результаты всё же имели значительные качественные различия. На рисунке 2.4 приведены результаты расчётов распределения намагниченности, когда функционал минимизировался с учётом и без учёта неявной зависимости W^h от векторного поля

m. Перечислим значения использованных при вычислении констант: $A = 1.3 \times 10^{-6}$ эрг/см, $M_s = 1420$ Гс, $K_1 = 4.0 \times 10^6$Эрг/см^3, $K_2 = 1.2 \times 10^6$Эрг/см^3, характерный размер кристалла $L = 190$ нм. Координатные оси выбраны так, что по оси x направлены вдоль ось легкого намагничивания и поле **m** в начальном состоянии.

Модуль градиента $\left|\nabla W^h\right|$ уменьшается от начального значения более чем в 10^5 раз до близкой к нулю величины при минимизации как с $\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{0}$, так и без учёта неявной зависимости. Если продолжать смещение смещение в направлении $-\nabla W^h$, то будет наблюдаться рост W^h. Окрестностях угловых точек (рисунок 2.4а) имеют такую особенность, что только в них векторы намагниченности отклоняются от начального положения. Наблюдается иллюзия однодоменного состояния, так как компонента намагниченности монокристалла $\overline{m^x} = \iint\limits_{\mathbf{D}} m^x dxdy,$ незначительно уменьшается от 1 до 0.98.

При учете неявной зависимости продолжение спуска приводит к возникновению размагниченного многодоменного состояния с $\overline{m^x} = -0.03$ (рисунок 2.4б).

Состояние на рисунке 2.4а удовлетворяет известному математическому определению точки локального минимума функционала W^h в пространстве независящих друг от друга переменных $\varphi_{i,j}$ и $\theta_{i,j}$. Следует отметить, что эта точка не является локальным минимумом функционала W^h в общем случае. Как раз это мы и наблюдали выше. Вычисление намагниченности в ориентированном против оси x внешнем поле $\mathbf{H}_{ext} = 2130$ Э, приводит к аналогичному результату для каждого из двух рассмотренных методов минимизации. На рисунке 2.4б показано примерное распределение намагниченности в этом случае. Отличие заключается в том, что ориентированные по полю домены вырастают за счёт ориентированных против поля.

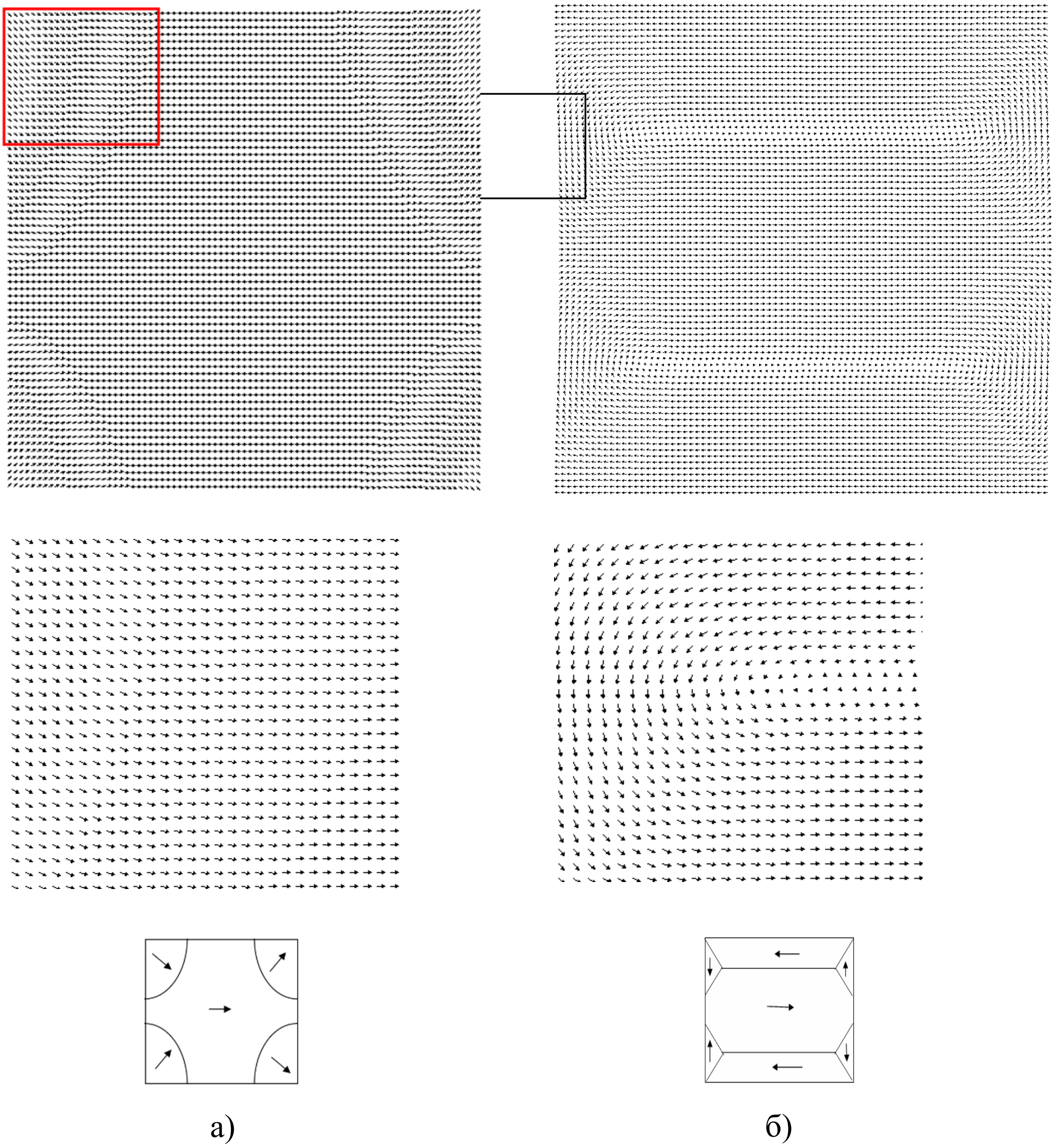


Рисунок 2.4 – Результат вычисления распределения намагниченности в монокристалле кобальта (сверху вниз: общий вид, фрагмент, схема): а) минимизацией функционала без учёта неявной зависимости от поля намагниченности; б) с учётом неявной зависимости. На рисунке изображена проекция поля намагниченности **m** на поперечное сечение кристалла.

Подводя итог, можно сказать, что в ряде случаев отказ от учёта неявной зависимости функционала W^h от поля **m** может приводить к качественно неверным результатам при его минимизации.

2.2 Влияние размеров и анизотропии на формирование доменных структур одноосных монокристаллов

В работе Ландау и Лифшица [2] доменная структура бесконечного монокристалла прямоугольного сечения представлена в виде, показанном на рисунке 2.5. Такое представление в теории микромагнетизма часто называют основополагающим, пионерским и т.д.. Такое представление доменной структуры получено исходя из общих соображений, а не на основе расчетов. Оно часто используется в качестве исходного предположения для различных вычислений количественных характеристик структур. К ним относятся ширина доменов, компонент энергии и т.д. Ниже коротко опишем физические основания построения структуры Ландау.

Исходя из общих соображений, в исходной структуре должны отсутствовать поверхностные и внутренние источники собственного поля так что такая структура должна обеспечивать нулевую магнитостатическую энергию монокристалла. Поверхностные источники отсуствуют за счёт прилегающих к поверхности доменов треугольного сечения. Векторы намагниченности $\mathbf{M}$ этих доменов параллельны поверхности. Блоховские доменные границы внутри монокристалла параллельны оси легкого намагничивания и не содержат источников поля. В рассматриваемой модели ориентация внутренних границ доменов треугольного сечения такова, что они

обеспечивают равенство нормальных составляющих векторов $\mathbf{M}$ по обе стороны от границы. Вследствие этого допущения угол $\varphi = 90^0$ (рисунок 2.5), а вычисленный по отрезку нормали от одной стороны границы до другой интеграл от источника поля $-\nabla \cdot \mathbf{M}$ равен нулю для любого типа границы. Это утверждение справедливо для ситуации, когда векторное поле $\mathbf{M}$ однородно во всех сеченях граничного слоя, параллельного плоскости границы. Так как интеграл равен нулю, то внутри границы источники магнитостатического поля взаимно компенсируются в пределах ширины границы, что позволяет считать, что узкая граница не создаёт источников поля. Перечисленные соображения послужили основой изложенного в работе [2] утверждения о том, что минимум свободной энергии достигается при ширине доменов $d = \sqrt{8L}(A/K)^{0.25}$, где A – константа обмена, K – константа анизотропии, L – размер монокристалла в направлении ОЛН (рисунок 2.5).

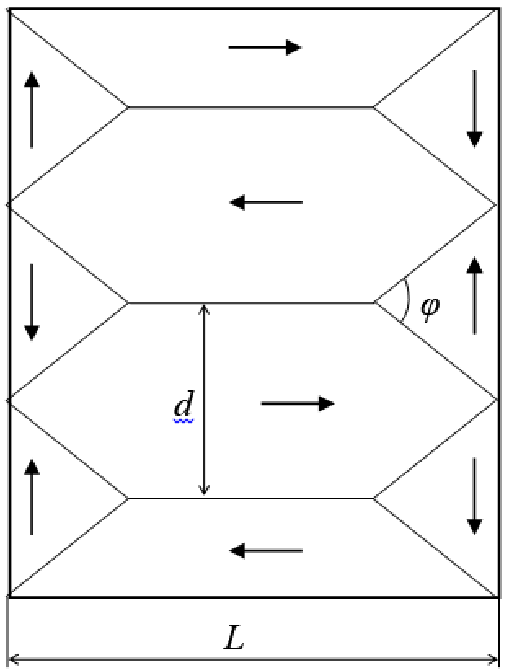
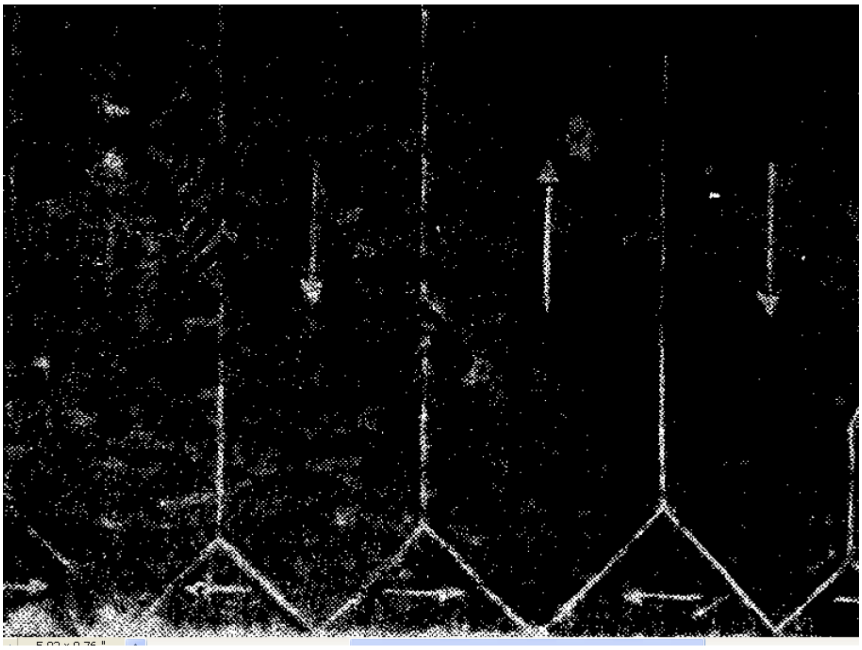


Рисунок 2.5 – Доменная структура одноосного монокристалла (структура Ландау) [2].

Изложенные выше соображения о доменной структуре монокристалла широко используются как в научной литературе [66-67], так и учебниках физики [68]. В работах [69,70] приводятся фотографии доменных структур Ландау на поверхности монокристаллов Si-Fe с кубической решеткой (трехосной анизотропией). В [70] существование структур Ландау в таких монокристаллах объясняется совпадением ориентации намагниченности в замыкающих (треугольных) доменах с направлением одной из легких осей, в то время как намагниченность основных (полосовых) доменов направлена по другой легкой оси. В работе [71] приводятся результаты расчетов поля намагниченности в пластинке одноосного магнетика $(Ni_{80}Fe_{20})$ размером $1000 \times 500 \times 250$ нм с ОЛН, ориентированной в плоскости пластинки. Структура Ландау наблюдалась в среднем сечении пластинки, параллельном большей поверхности. Результаты расчетов подтверждались экспериментальными данными. Странным кажется то, что с развитием вычислительной техники, когда стало возможным проверить предположение Ландау о виде доменной структуры в бесконечно длинном одноосном монокристалле с поперечной ориентацией ОЛН, этого до сих пор не сделано. Во всяком случае, авторам настоящей работы неизвестны работы, в которых бы проверялась возможность существования структур Ландау в длинных (стержнеобразных) одноосных монокристаллах. Поэтому одна из задач настоящей работы состояла в проверке изложенных в работе Ландау и Лифшица [2] предположений о доменной структуре бесконечно длинного одноосного монокристалла с помощью методов вычислительного эксперимента безотносительно любых исходных предположений о доменной структуре.


а)

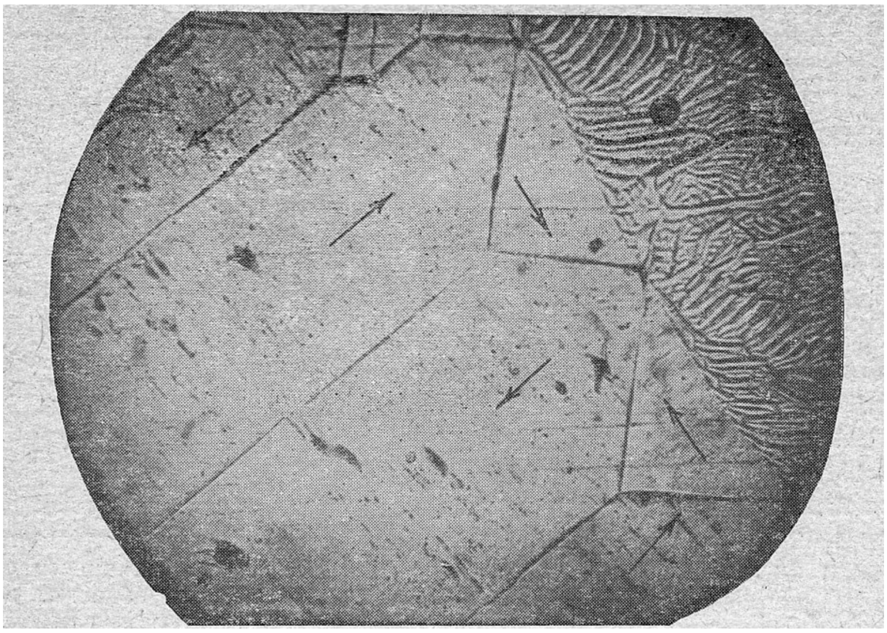

б)

Рисунок 2.6 – Доменная структура Ландау на поверхности монокристаллов Si-Fe представленная в работах [69] (а) и [70] (б).

Постановка задачи совпадает с описанной в разделе 2.1, за исключением расположения системы координат [72-74]. Т.е. рассматривается вычисление поля намагниченности в поперечном сечении $L \times L$ бесконечно длинной монокристаллической призмы (области **D)** с расположенной на нем координатной системой. Оси Ox и Oy ортогональны граням призмы, ось Oz ортогональна сечению. Начало координат расположено в центре квадрата **D**. Как и в разделе 2.1**,** координаты выражались в единицах L, в которых сечение **D** – квадрат 1×1. Предполагается, что намагниченность $\mathbf{M} = (M^x, M^y, M^z)$ определяется только координатами x и y. Ось легкого намагничивания сонаправлена с осью Ox..

Для проведения сравнительных расчетов использовались два метода решения. Первый метод носит название минимизации функционала свободной энергии (2.5), второй метод предполагает решение уравнения (1.11), называемого уравнением Ландау-Лифшица. Уравнение (1.11) записывается в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff} - \lambda\, \mathbf{m} \times \left(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff}\right), \qquad (2.27)$$

где $\tau = t|\gamma'|M_s$, $\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{H}_{eff} / M_s$ – безразмерный вектор эффективного поля, компоненты которого определяются выражениями

$$h_{eff}^x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{H_{ext}^x}{M_s} + \frac{2A}{{M_s}^2 L^2} \Delta m^x + \frac{m^x}{{M_s}^2}\left[2K_1 + 4K_2\left(1 - \left(m^x\right)^2\right)\right];$$

$$h_{eff}^y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{H_{ext}^y}{M_s} + \frac{2A}{{M_s}^2 L^2} \Delta m^y; \;\; h_{eff}^z = \frac{2A}{{M_s}^2 L^2} \Delta m^z + \frac{H_{ext}^z}{M_s}.$$

Ниже приводятся результаты, вычисленные при $\lambda = 0.15$. Граничное условие для уравнения (2.27) без учета поверхностной энергии имеет вид (1.13): $\partial \mathbf{m} / \partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$.

Для численного решения задачи функционал свободной энергии (2.5) и уравнение (2.27) аппроксимировались дискретными аналогами на равномерной сетке с пространственным шагом h. Равновесные устойчивые состояния системы находились двумя способами: минимизацией дискретного аналога функционала (2.5) и вычислением стационарных решений дискретного аналога уравнения (2.27). Подробно метод минимизации и решение задачи (2.2-2.3) описаны в разделе 2.1. Для аппроксимации уравнения (2.27) использовалась конечно-разностная явная схема (1.16), порядок аппроксимации которой внутри области **D** равен $O(\delta\tau + h^2)$, где $\delta\tau$ -

временной шаг, а условие $\partial \mathbf{m} / \partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$ на границе $\mathbf{D}$ с порядком $O(h)$. Для компонент вектора намагниченности монокристалла $\overline{\mathbf{m}}$ справедливы выражения: $\overline{m^x} = \iint\limits_{\mathbf{D}} m^x dxdy$, $\overline{m^y} = \iint\limits_{\mathbf{D}} m^y dxdy$, $\overline{m^z} = \iint\limits_{\mathbf{D}} m^z dxdy$. Если монокристалл размагничен, то $|\overline{\mathbf{m}}| = 0$, в случае, если монокристалл намагничен до насыщения, $|\overline{\mathbf{m}}| = 1$. Критический размер однодоменности d_C задается выражением [3]:

$$d_C = 5.6\sqrt{AK_1} / M_S^{\,2}. \qquad (2.28)$$

В расчетах распределения намагниченности в монокристаллах использовались следующие значения параметров: а) для $Ni_{80}Fe_{20}$ - A=1.3$\times$10^{-6} Эрг/см, M_s=800 Гс, K_1=500 Эрг/см^3, K_2=0 Эрг/см^3; б) для $Nd_2Fe_{14}B$ - A=1.7$\times$10^{-6} Эрг/см, M_s=1275 Гс, K_1=4.5$\times$10^7 Эрг/см^3, K_2=6.6$\times$10^6 Эрг/см^3. Параметры *Co* приведены на стр. 41. Значения d_C для $Ni_{80}Fe_{20}$, *Co* и $Nd_2Fe_{14}B$, вычисленные по формуле (2.28), составляют 7.05 нм, 63.3 нм и 301 нм соответственно. В данной работе проверка полученных решений проводилась с помощью стохастических изменений равновесных векторных полей, устойчивость найденного решения подтверждалась возвратом этих полей в исходные состояния. Полученные таким образом решения проецировались на сетки с меньшим шагом. Использовались сетки размером от от 81$\times$81 до 1041$\times$1041 узлов. Верхней границей величины шага сетки является характерная безразмерная ширина блоховской доменной границы $\sqrt{A/K_1}/L$. При расчёте на сетках с малым шагом векторное поле изображалось с помощью точек различного цвета: при отклонении вектора намагниченности **m** от оси OX менее чем на 45^0 использовались точки серого цвета, при противоположных направлениях – светлые точки, а случаях ориентации преимущественно поперёк ОЛН – тёмные точки. Отметим, что некоторые рисунках содержат изображения проекций поля **m** на сетки с крупным шагом. Кроме того, на рисунках показаны расчитанные фрагменты поля **m**.

Рассмотрим результаты, полученные для монокристалла кобальта. За начальное состояние взята однородная намагниченность, в этом случае векторы **m** сонаправлены с осью OX (вдоль ОЛН). Для кристаллов размером $L = 0.5d_C$ с помощью метода минимизации дискретного сеточной аппроксимации функционала (2.5) и с помощью метода решения сеточного уравнения для (2.27) были получены одинаковые результаты, изображенные на рисунке 2.7. Как видим, в монокристалле образуется вихревая структура.

Полученные результаты аналогичны результатам, полученным в [53] для монокристалла кубической формы такого же размера. Такая конфигурация обнаруживает, что проекции намагниченности монокристалла на оси OX и OY ($\overline{m^x}$ и $\overline{m^y}$) практически равны нулю, а проекция на ось OZ $\overline{m^z} = 0.58$. При уменьшении размера образца L до $0.2\,d_C$ происходит увеличение $\overline{m^z}$ до 0.96. Это соответствует означает квазиоднодоменному состоянию с намагниченностью вдоль оси OZ.

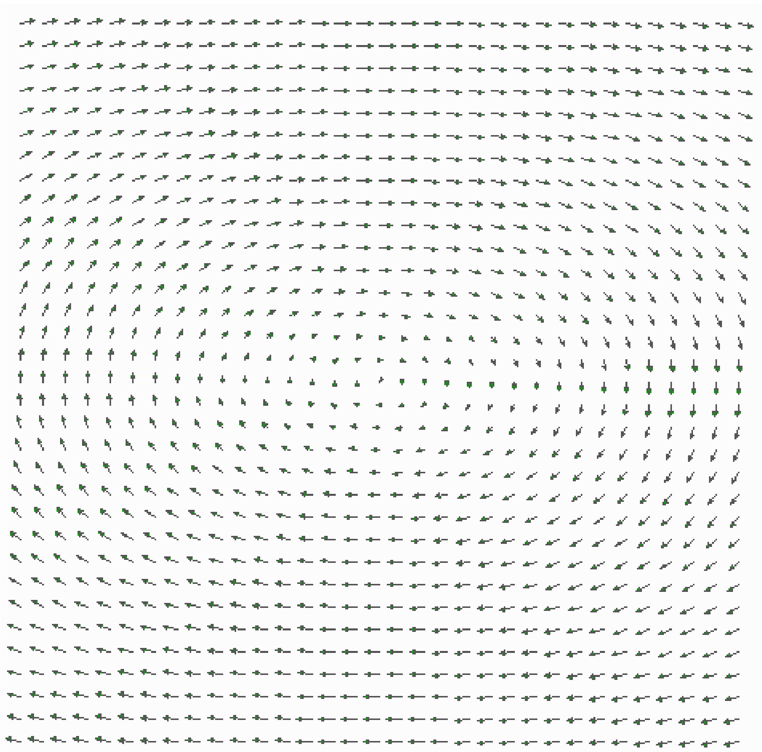
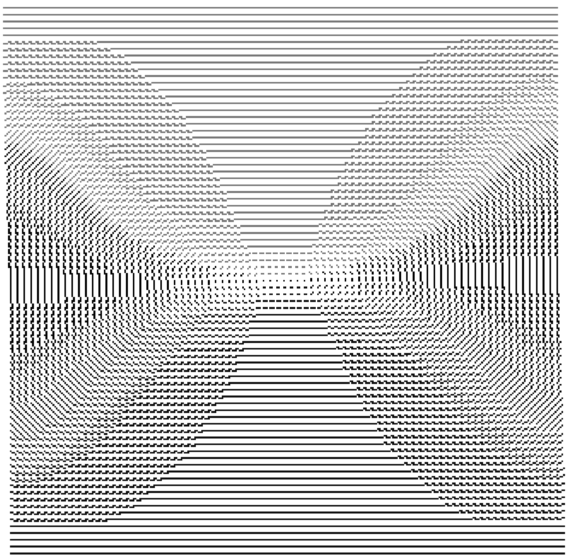
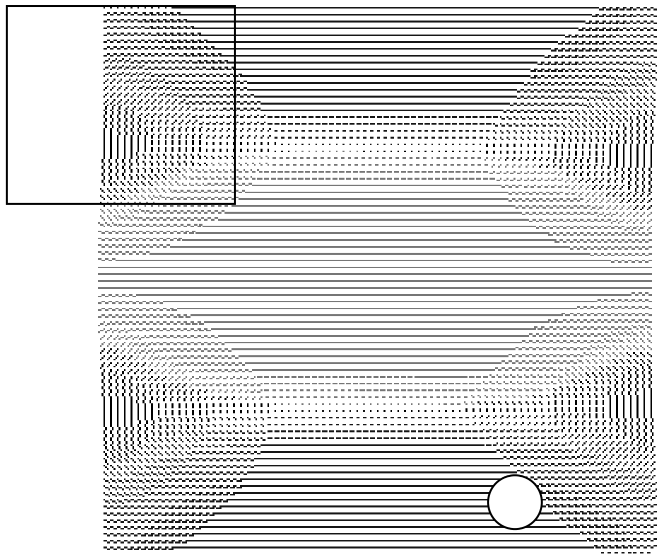


Рисунок 2.7 – Распределение намагниченности в Co при $L = 0.5d_C$. Показана проекция векторного поля на сетку 33×33.



а)



б)

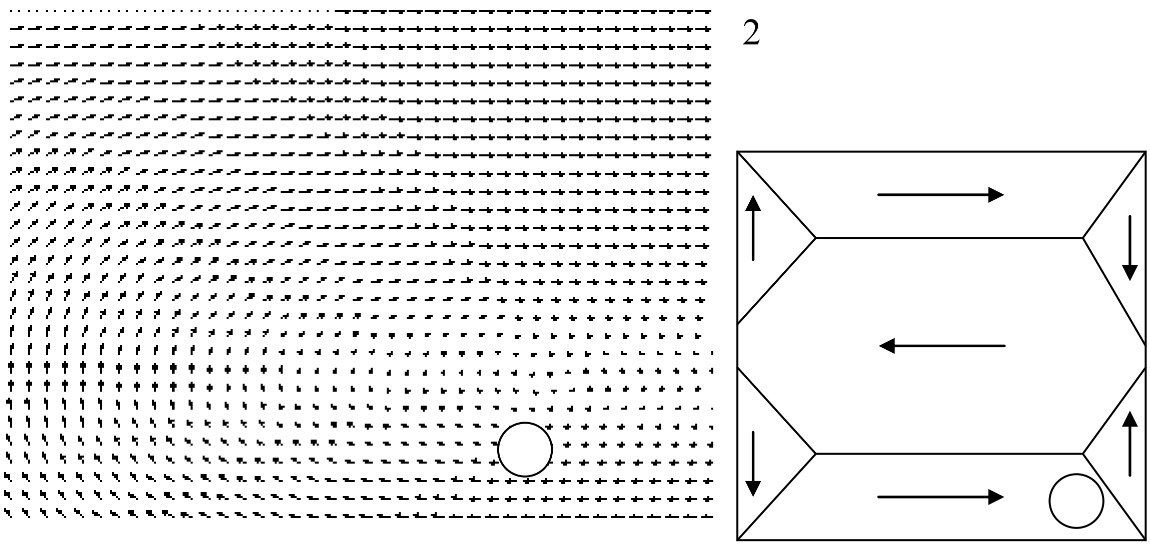


Рисунок 2.8 – Распределение намагниченности в Co при $L = 1d_C$ полученное: а) решением уравнения (2.27); б) минимизацией функционала (2.5): 1,2,3 – соответственно общий вид, фрагмент, схема.

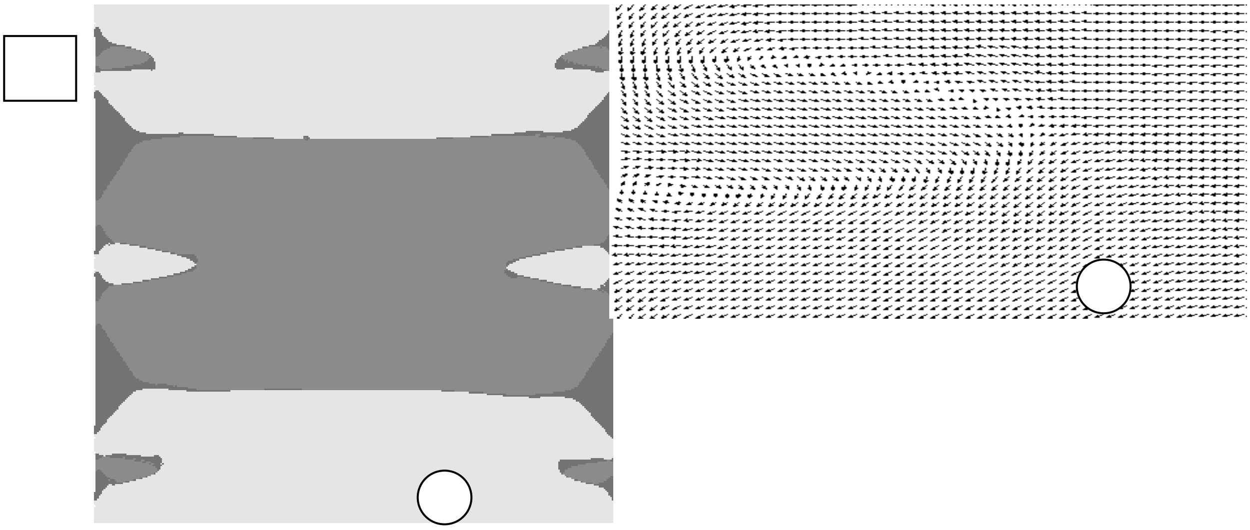
Решение уравнения Ландау-Лифшица при $L = d_C$ обнаруживает к доменную структуру (рисунок 2.8а). Примечательно, что метод минимизации функционала W показывает качественно отличающийся результат, изображенный на рисунке 2.8б. Как видим, он представляет собой многодоменную структуру. Обозначим полученные решения по числу полосовых доменов: II_2 – первое решение, II_3 – второе решение. Для первой структуры локальный минимум свободной энергии равен $W_{II_2} = 1.40$, для второй структуры $W_{II_3} = 1.84$ (подробнее результаты отражены таблице 2.1). Будем условно называть стабильным равновесное состояние, в котором энергия системы минимальна. Среди обнаруженных состояний это II_2.

Таблица 2.1 Результаты расчетов для монокристаллов *Co*

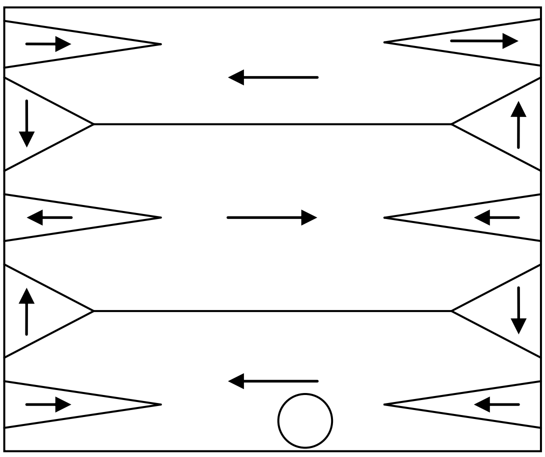
Начальное условие		Результаты расчетов						
Размер монокрис-талла (L)	Поле **m** в начальном состоянии	Тип доменной структуры	Компоненты энергии W			Значе-ние W	Тип состояния	Номер рисунка
			W_e	W_d	W_a			
1 d_c	по оси *Ox*	$П_2$	0,35	0,39	0,66	1,40	стабильное	2.8а
1 d_c	по оси *Ox*	$П_3$	0,67	0,17	1,00	1,84	метастабильное	2.8б
1 d_c	$П_4^*$	$П_2$	0,35	0,39	0,66	1,40	стабильное	2.8а
3 d_c	по оси *Ox*	$П_3$	0,29	0,20	0,43	0,92	стабильное	
3 d_c	$П_2$	$П_2$	0,11	0,39	0,48	0,98	метастабильное	
3 d_c	$П_4^*$	$П_4$	0,45	0,15	0,48	1,08	метастабильное	
3 d_c	$П_5^*$	$П_5$	0,63	0,12	0,57	1,32	метастабильное	
3 d_c	$П_6^*$	$П_5$	0,63	0,12	0,57	1,32	метастабильное	
10 d_c	по оси *Ox*	$П_3$	0,08	0,19	0,29	0,56	метастабильное	
10 d_c	$П_4^*$	$П_4$	0,13	0,13	0,29	0,52	стабильное	
10 d_c	$П_5^*$	$П_5$	0,19	0,10	0,26	0,55	метастабильное	
10 d_c	$П_6^*$	$П_6$	0,22	0,08	0,28	0,58	метастабильное	
15 d_c	по оси *Ox*	$Ш_3$	0,09	0,13	0,26	0,48	метастабильное	2.9а
15 d_c	$П_3$ (Рисунок3б)	$П_3$	0,05	0,19	0,27	0,51	метастабильное	2.9б
15 d_c	$П_4^*$	$П_4$	0,09	0,12	0,23	0,44	метастабильное	
15 d_c	$П_5^*$	$П_5$	0,13	0,09	0,21	0,43	стабильное	
15 d_c	$П_6^*$	$П_6$	0,17	0,07	0,22	0,46	метастабильное	
20 d_c	по оси *Ox*	$Ш_3$	0,08	0,12	0,24	0,44	метастабильное	2.10а
20 d_c	по оси *Oy*	$П_{11}$	0,27	0,04	0,23	0,54	метастабильное	2.10б
20 d_c	по оси *Oz*	$Ш_3$	0,08	0,12	0,24	0,44	метастабильное	2.10в
20 d_c	$П_4$	$П_4$	0,07	0,13	0,21	0,41	метастабильное	
20 d_c	$П_5$	$П_5$	0,10	0,09	0,19	0,38	метастабильное	
20 d_c	$П_5^*$	$Ш_5$	0,11	0,08	0,19	0,38	стабильное	2.10г
20 d_c	$П_6^*$	$Ш_6$	0,13	0,07	0,19	0,39	метастабильное	
40 d_c	по оси *Ox*	$Ш_5$	0,07	0,06	0,15	0,28	-	2.11

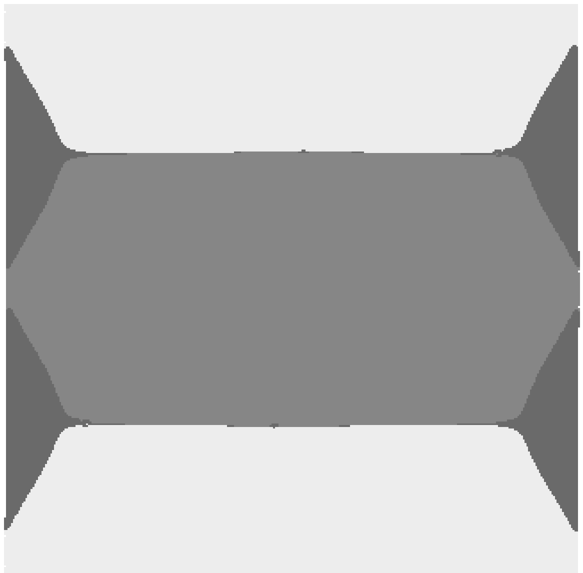
При размерах $L = 3d_C$ и $L = 10d_C$ с помощью обоих методов были получены одинаковые решения – трехполосная структура $П_3$. В этом случае размер треугольных доменов уменьшается при увеличении L.

В случае $L > 10d_C$ применялось только уравнение (2.27). Для случая $L = 15d_C$ получено решение, показанное на рисунке 2.9а, обозначаемая в дальнейшем $Ш_3$. Такие структуры являются структурами типа II клиновидными доменами, расположенными между полосами. Здесь количество полосовых доменов обозначается нижним индексом. Случай $L = 20d_C$ выявляет аналогичную структуру, однако здесь клиновидные домены имеют больший размер (рисунок 2.10а). Для кристалла размером $L = 40d_C$ при начальном условии намагниченности по оси *OX,* изображённой на рисунке 2.11, выявляется пятиполосная структура, аналогичная структуре в кристалле с $L = 20d_C$ (рисунок 2.10г). Отличие заключается в увеличении размеров клиньев и уменьшении размеров треугольных участков.



а)





б)

Рисунок 2.9 – Структура кобальта при $L = 15d_C$, а) начальное состояние однородная намагниченность по оси *OX.* Здесь 1,2,3 – общий вид, 2 – фрагмент, 3 – схема; б) начальное состояние – структура II_3, изображённая на рисунке 2.8б.

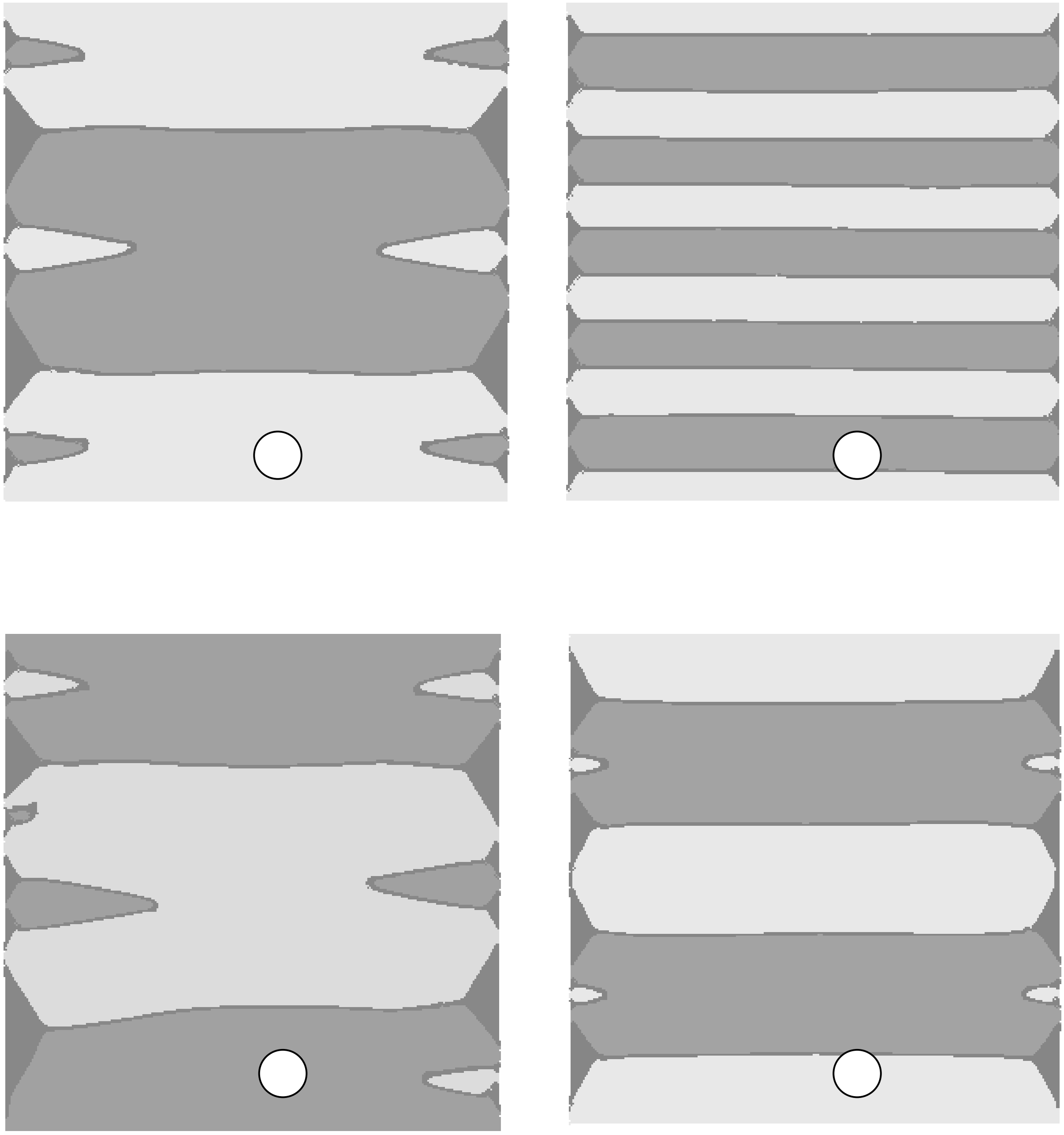


Рисунок 2.10 – Структуры кобальта при $L = 20d_C$. а) в начальном состоянии **m** ориентирован по оси *Ox*; б) в начальном состоянии **m** ориентирован по оси *Oy*; в) в начальном состоянии **m** ориентирован по оси *Oz*; г) - структура П_5^*.

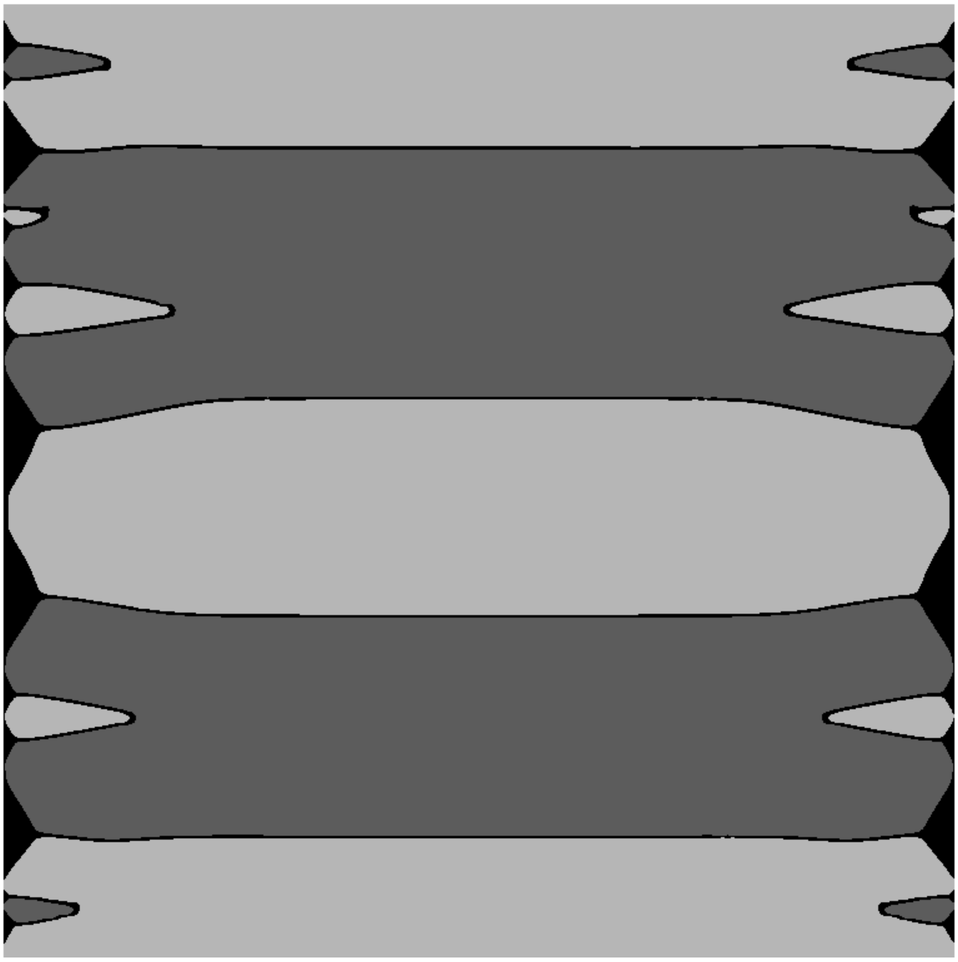


Рисунок 2.11 – Доменная структура в Co при $L = 40d_C$, рассчитанная на сетке 1041×1041. В начальном состоянии намагниченность **m** ориентирована по оси *Ox*. Показана проекция на сетку 761×761.

При начальном выборе намагниченностей, отличных от ОЛН направлений, выявлялись другие формы возможных равновесных состояний. Кроме того, при других размерах *L* выявлялись другие доменные и искусственные ленточные структуры Общий вид таких структур показан на рисунке 2.12. Они имеют обозначение $\mathrm{II}^*_{\mathrm{k}}$, где k – число горизонтальных полосовых доменов. При $L \geq 10d_C$ обнаруживаются энергетически более выгодные состояния по сравнению с состояниями, полученными из начальных условий, соответствующих однородной намагниченности по ОЛН.

Как видно из таблицы, для $L = 15d_C$ в трехполосной структуре II_3 появляются трёхполосные домены, как указано на рисунке 2.9б. Кроме того, возникают клиновидные домены (рисунок 2.10а), которые уменьшают магнитостатическую энергию W_d, при одновременном повышении энергии обмена W_e и уменьшении энергии анизотропии W_a.

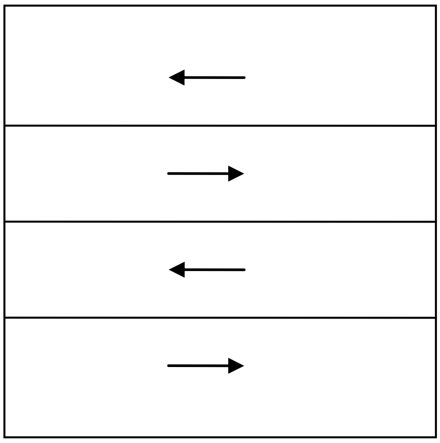
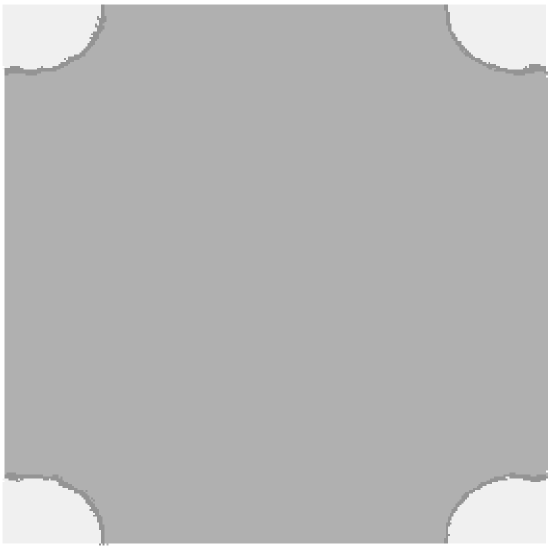


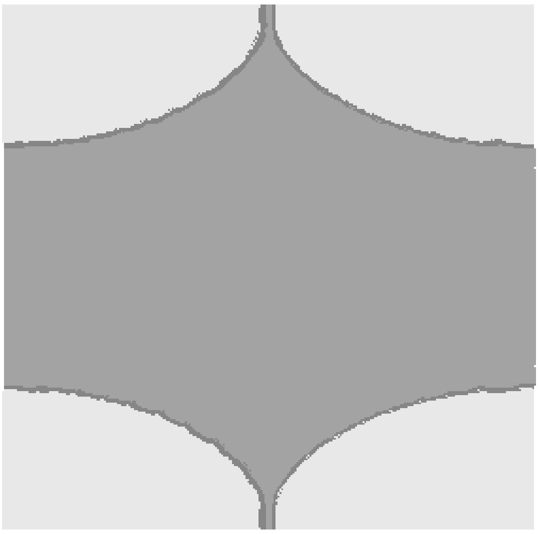
Рисунок 2.12 – Начальное состояние системы вида II_4^*.

Увеличение энергии обмена W_e является следствием увеличения числа доменов и площади доменных границ. Уменьшение энергии анизотропии W_a – объясняется сокращением размеров замыкающих треугольных доменов, где ориентация векторов **m** перпендикулярна ОЛН (рисунок 2.9а). В случае $L = 20d_C$ клиновидные домены проявляются точно так же (структуры II_5 и III_5 в таблице), однако здесь эффект более слабый по причине малых клиньев в структуре с пятью полосами (рисунок 2.10г).

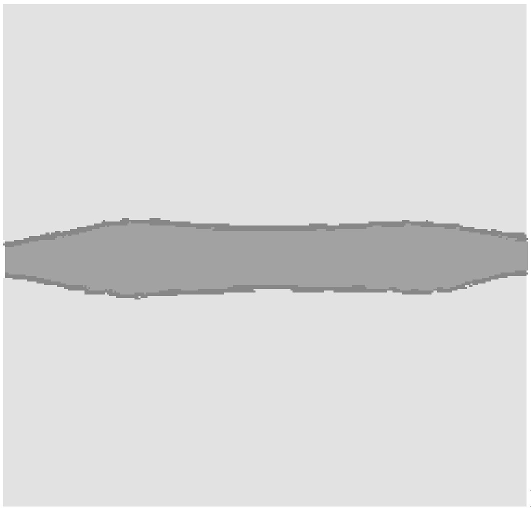
В соответствии с результатами, изложенными в работе [66], домены клиновидной формы в монокристалле кобальта в стабильной структуре появляются при $L \geq 8d_C$. В описанных расчётах это наблюдалось при $L = 15d_C$ в структурах с метастабильностью (рисунок 2.9а) и в стабильной при $L = 20d_C$. Следует отметить, что подстановка изображённой на рисунке 2.9а конфигурации в качестве исходного состояния для $L = 10d_C$ обнаруживает существование клиновидных доменов в метастабильном состоянии даже при небольших размерах монокристалла.



а)



б)



в)

Рисунок 2.13 – Доменные структуры в $Nd_2Fe_{14}B$ в состоянии неравновесности при $L = 1d_C$. Начальное состояние: однородная намагниченность по оси OX во внешнем поле $H^x_{ext} / M_s = -40$: а,б,в – изменение во времени.

В магнетике с высокой анизотропией $Nd_2Fe_{14}B$ $\left(K_1 / M_S^2 = 27.7\right)$ расчеты проводились только для $L \le 2d_C$ вследствие узкой границы доменов. Было выяснено, что, в отличие от Co, однородно намагниченный вдоль ОЛН монокристалл $Nd_2Fe_{14}B$ под действием собственного поля не размагничивается. При включении противоположно **m** достаточно большого внешнего поля $\mathbf{H}_{ext}$ в углах кристалла происходит возникновение зародышей перемагничивания. Они прорастают внутрь объема монокристалла. Вследствие этого весь монокристалл перемагничивается направлении $\mathbf{H}_{ext}$, как показано на рисунке 2.13. Величина поля, в котором появляются зародыши, вполне достаточно для полного перемагничивания, это приводит к неравновесности возникающих в постоянном внешнем поле доменных структуры. С другой стороны, при импульсном включении поля зародыши перемагничивания (рисунок 2.13а), либо исчезают (при малом размере), либо прорастают. Это сопровождается образованием трехполосной равновесной структуры типа II_3, изображённой на рисунке 2.14. Альтернативным методом получения многодоменной структуры является намагничивание монокристалла в отличных от ОЛН направлениях при отключением внешнего поля в конце процесса. В случае малого кристалла $L \le 0.04 d_C$ равновесным может быть только однодоменное состояние. В $Nd_2Fe_{14}B$ поле намагниченности ориентируется поперек монокристалла (по ОЛН), в отличие от Co. В рассмотренных в данной работе монокристаллах справедлив критерий, управляющий продольной или поперечной направленностью поля в однородно намагниченном состоянии. В случае ориентации поля **m** по оси OX магнитостатическое поле создает две бесконечные полосы (грани призмы) $x = -1/2$ и $x = 1/2$. Поверхностная плотность источника $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$ на них равна -1 и 1. Потенциал поля в произвольной точке сечения с координатами $x = x_0$, $y = y_0$, $z = 0$ вычисляется как сумма вклада полос:

$$U(x_0, y_0) = \lim_{\delta \to +\infty} \int_{-1/2}^{1/2} dy \int_{-\delta}^{\delta} \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 \right)^{-1/2} \Bigg|_{x=-1/2}^{x=1/2} dz =$$

$$= \left\{ (y - y_0) \ln \frac{(y - y_0)^2 + (1/2 + x_0)^2}{(y - y_0)^2 + (1/2 - x_0)^2} + (1 + 2x_0) arctg \frac{y - y_0}{1/2 + x_0} - (1 - 2x_0) arctg \frac{y - y_0}{1/2 - x_0} \right\} \Bigg|_{y=-1/2}^{y=1/2}.$$

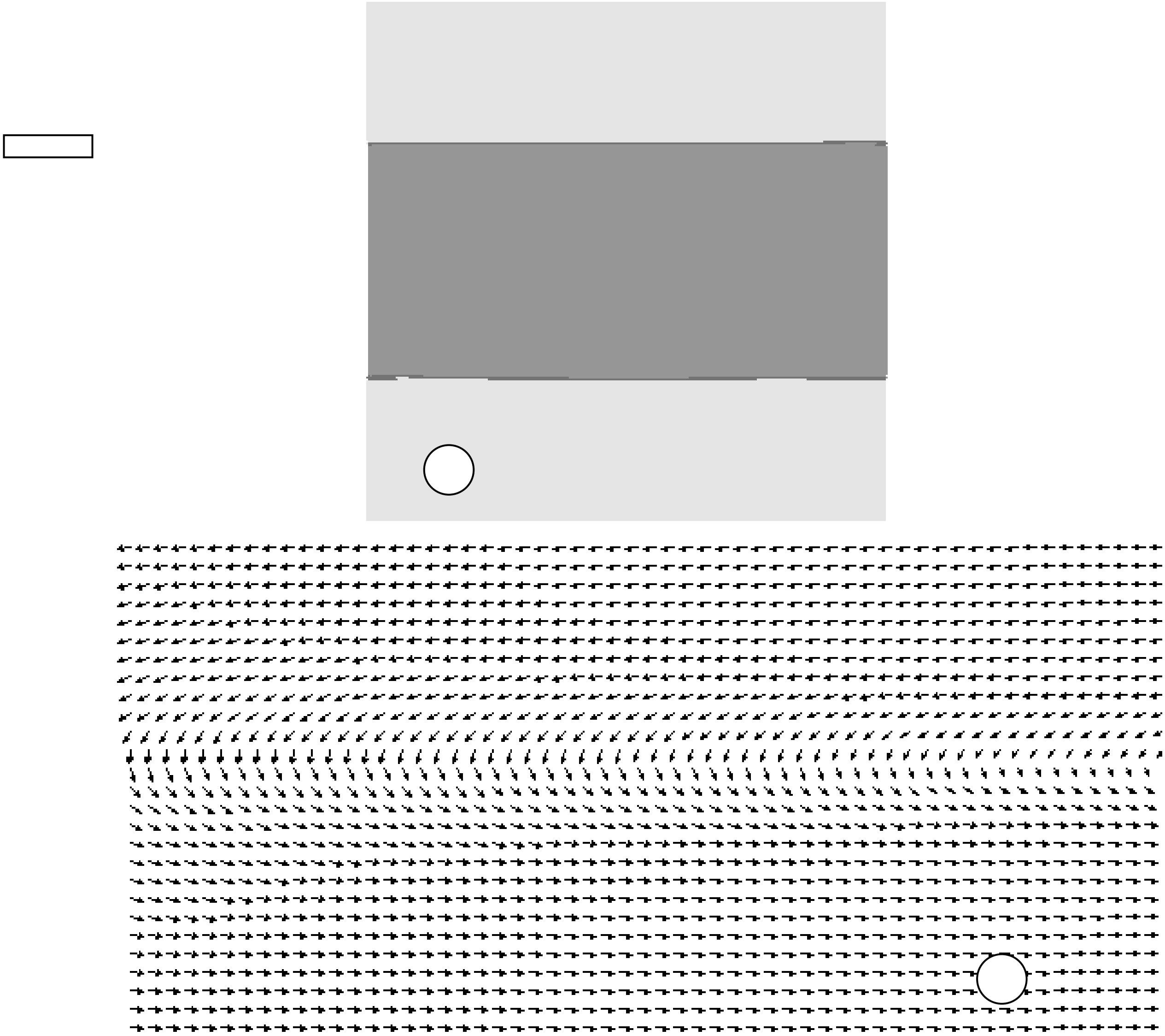


Рисунок 2.14 – Трехполосная доменная структура в $Nd_2Fe_{14}B$ при $L = 2d_C$, полученная из однородно намагниченного по оси Ох состояния импульсом внешнего поля: а - общий вид; б - фрагмент.

Выразив потенциал, получаем формулу, описывающую магнитостатическую энергию системы:

$$W_d = \frac{1}{2}\iint_D \frac{\partial U}{\partial x} dxdy = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} U(x,y)\Big|_{x=-1/2}^{x=1/2} dy = \pi .$$

Здесь $W_d = \pi$ безразмерна и независима как от магнитных параметров монокристалла, так и от размера L. В случае продольной ориентации однородного поля вектора **m** энергия системы $E = W_a = (K_1 + K_2)/M_S^2$, а при поперечной (по ОЛН) $E = W_d = \pi$. На остове вышесказанного формулируется критерий: если $(K_1 + K_2)/M_S^2 < \pi$, то в однодоменном состоянии энергетически выгодна продольная ориентация однородного поля **m**, если $(K_1+K_2)/M_S^2>\pi$, то поперечная. Для *Co* и величина $(K_1+K_2)/M_S^2$ составляет 2.58, а для $Nd_2Fe_{14}B$ она равна 31.7. Как видим, результаты расчета поля **m** в кристаллах малых размеров соответствуют полученному критерию.

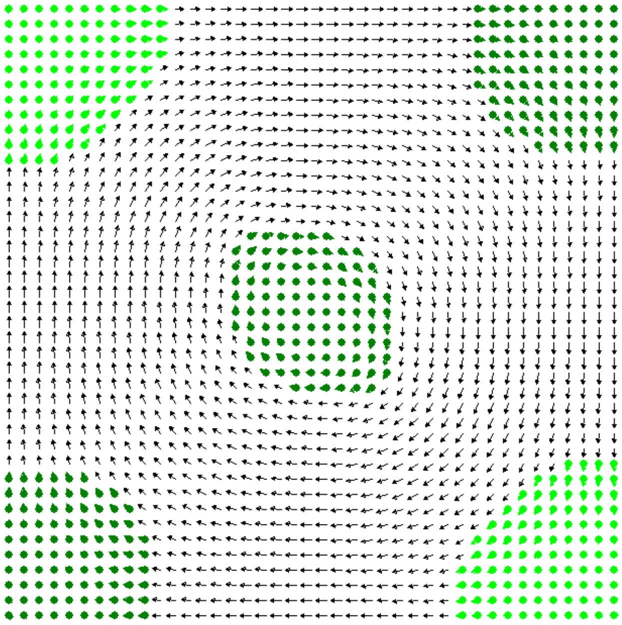


Рисунок 2.15 – Поле намагниченности в монокристалле $Ni_{80}Fe_{20}$ с $L=142d_C$, полученное из однородно намагниченного по оси x состояния. Кружками темного цвета отмечены векторы, с преимущественной ориентацией по оси z, светлые кружки обозначают противоположную ориентацию.

Даже в сравнительно крупном монокристалле $Ni_{80}Fe_{20}$ ($L=80d_C$) поле **m** из состояния однородной намагниченности по оси *x* из-за низкой анизотропии ориентируется в однородное, направленное вдоль монокристалла. Увеличение размера до $L=142d_C$ (1 мкм) приводит из того же начального состояния к вихревому состоянию с большой долей областей, в которых поле **m** ориентировано преимущественно вдоль монокристалла (рисунок 2.15). При размере $L=1646d_C$ (11.61 мкм) из начального состояния II_3^* получается структура Ландау II_3, сходная с показанной на рисунке 2.4б для *Co* размером $L=3d_C$. Приведенные в работе [71] экспериментальные и расчетные данные о существовании стабильного состояния доменной структуры Ландау в пластинке $1000\times500\times250$ нм с ОЛН, ориентированной вдоль длинной стороны, можно объяснить влиянием поверхностей, ортогональных оси z, которых нет у бесконечно длинного монокристалла. По данным настоящей работы стабильным состоянием бесконечного монокристалла $Ni_{80}Fe_{20}$ с $L = 1000$ нм является однородно намагниченное по оси z.

Несмотря на некоторые расхождения с доменной структурой на рисунке 2.5, результаты проведенного численного моделирования в монокристалле Co показали возможность существования доменных структур Ландау по крайней мере в диапазоне размеров $1 \le L \le 40 d_C$. При меньших размерах структура Ландау трансформируется в вихревую (рисунок 2.7), а затем в однодоменную. Как видно на рисунках, появление клиновидных доменов приводит к уменьшению относительных размеров треугольных доменов, в которых намагниченность ориентирована поперек ОЛН. Так что и в больших монокристаллах структура Ландау должна вырождаться. Расхождения рассчитанных доменных структур от показанной на рисунке 2.5 состоят также в расположении и форме треугольных доменов, которые не примыкают друг к другу, а углы φ для Co могут значительно отличаться от 90^0. Из таблицы видно, что во многих случаях компонента W_d дает существенный вклад в свободную энергию W, что противоречит исходным соображениям, на основе которых построена структура на рисунке 2.5.

В монокристаллах $Nd_2Fe_{14}B$ доменная структура Ландау не наблюдается, поскольку угол φ становится близким к нулю, а треугольные домены вырождаются в доменную границу неелевского типа (рисунок 2.14б). В монокристаллах $Ni_{80}Fe_{20}$ рассматриваемой формы структуры Ландау появляются при сравнительно больших размерах.

Таким образом, существование доменных структур Ландау в бесконечно длинных монокристаллических призмах возможно, но ограничено как магнитными параметрами, так и размерами образца. Следует заметить, что при условиях, когда существуют структуры Ландау, не исключено существование других равновесных доменных структур, которые можно получить при некоторых начальных условиях (см. главу 5, раздел 5.3).

2.3 Микромагнитное моделирование доменных структур в монокристаллической призме треугольного сечения

В предыдущем разделе 2.2 рассматривалось влияние магнитных параметров и размеров монокристалла на доменные структуры в бесконечно длинном одноосном монокристалле квадратного сечения. В настоящем разделе для сравнения выбран монокристалл с поперечным сечением в виде прямоугольного треугольника.

В работе [2] изменение доменной структуры одноосного монокристалла при отклонении угла наклона ОЛН к границе от 90^0 представлено в виде, показанном на рисунках 2.16а-б. В работе [4] предполагалось, что в призме треугольного сечения домены должны иметь треугольную форму (рисунок 2.16в). Указанные представления авторов этих работ о форме доменов являлись исходными предположениями и выдвигались, чтобы обеспечить нулевую магнитостатическую энергию монокристаллов при условии, что доменные границы не являются источниками магнитостатического поля. Как и в предыдущем случае, расчет доменных структур в призме треугольного сечения проводился без использования предварительных представлений о виде доменной структуры в состоянии равновесия [75].

Рассмотрена бесконечно длинная монокристаллическая призма, поперечным сечением которой является равнобедренный прямоугольный треугольник с расположенной на нем координатной системой. Ось *Ox* и ось легкого намагничивания ориентированы по гипотенузе, а ось *Oz* ортогональна сечению. Предполагается, что намагниченность **M** зависит только от координат x и y. Уравнение Ландау-Лифшица для рассматриваемой задачи имеет вид (2.27). В расчетах предполагалось отсутствие внешнего поля ($\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{0}$) и $K_2 = 0$. Используя обозначения $\overline{A} = \dfrac{2A}{{M_s}^2 L^2}$ и $\overline{K} = K_1 / {M_s}^2$, где L – длина гипотенузы в сечении призмы, компоненты эффективного поля можно записать:

$$h_{eff}^x = -\frac{\partial U}{\partial x} + \overline{A}\Delta m^x + 2\overline{K}m^x,\quad h_{eff}^y = -\frac{\partial U}{\partial y} + \overline{A}\Delta m^y,\quad h_{eff}^z = \overline{A}\Delta m^z .$$

Потенциал собственного поля рассчитывался методом, описанным в разделе 2.1. В расчетах использовалось значение $\lambda = 0.2$. Предполагалось, что для уравнения (2.27) на гранях монокристалла выполняется условие: $\partial \mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$. Равновесные состояния системы находились вычислением стационарных решений дискретного аналога уравнения (2.27). Шаг сетки во всех случаях выбирался меньше характерной безразмерной ширины блоховской доменной границы $\delta = (\sqrt{A/K})/L$. Приводимые ниже результаты получены варьированием безразмерных параметров $\overline{A}$ и $\overline{K}$, зависящих от магнитных свойств и размера образца вблизи значений $\overline{A_0} = 3.58 \cdot 10^{-3}$, $\overline{K_0} = 1.984$. Данные значения соответствуют монокристаллу *Co* с характерным размером *L*=190 нм.

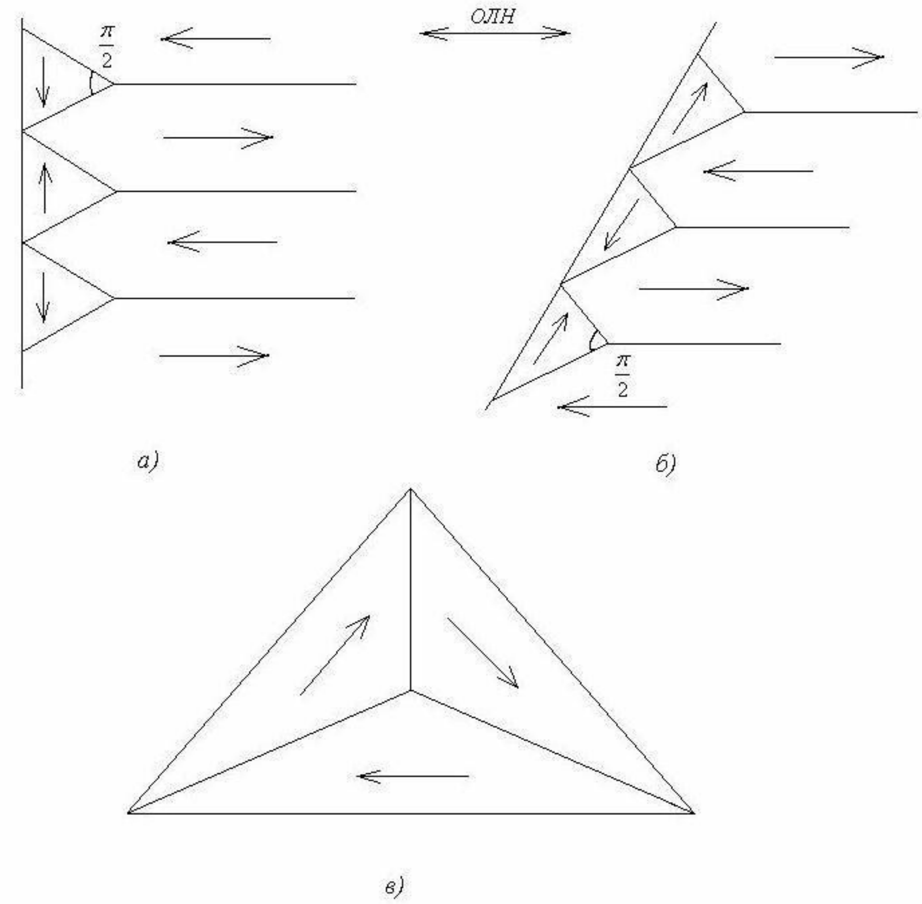


Рисунок 2.16 – Доменные структуры в монокристалле представленные: а, б) – в работе [2]; в) – в работе [4].

При изменении параметров в пределах $0.1\overline{A_0} \le \overline{A} \le 1.5\overline{A_0}$, $0.5\overline{K_0} \le \overline{K} \le 4\overline{K_0}$ получены доменные структуры, которые можно разделить на 3 вида, показанные на рисунках 2.17-2.18. Треугольная доменная структура на рисунке 2.17 соответствует представленной в работе [4] (рисунок 2.16в). Двухполосная и трехполосная структуры, показанные на рисунке 2.18, соответствуют представленной в работе [2] (рисунок 2.16б). Доменная структура на рисунок 2.19 является промежуточной и сочетает в себе элементы треугольной и полосовой. Таким образом, подтверждается возможность существования доменных структур обоих видов, которые в работах [2,4] рассматривались в качестве предположений.

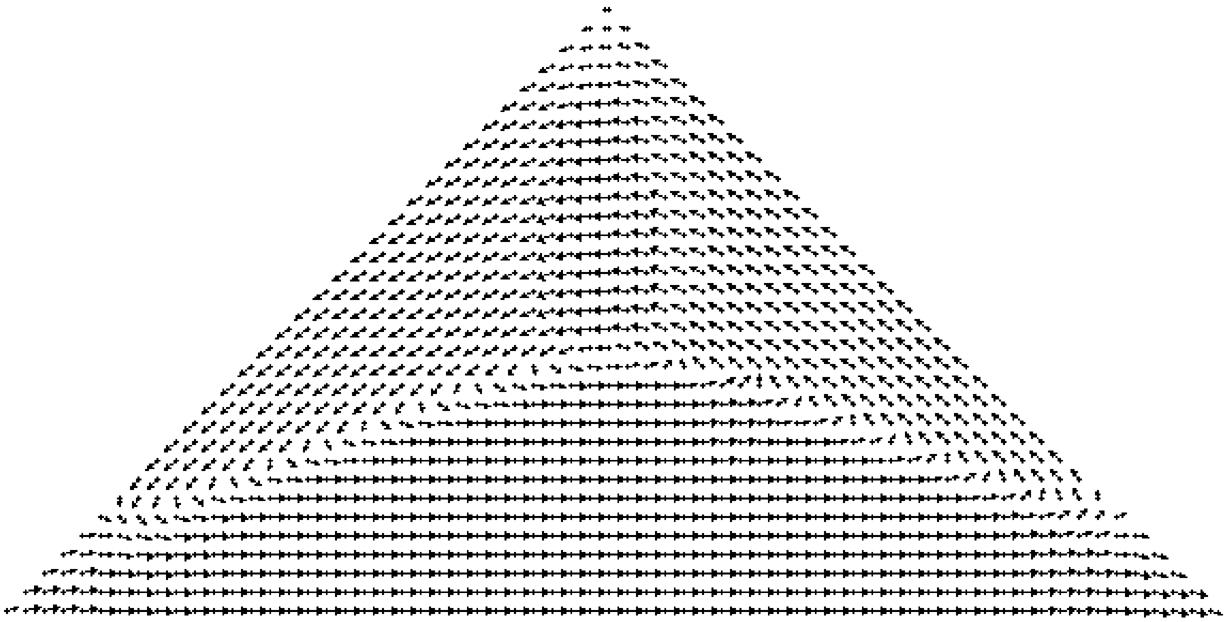


Рисунок 2.17 – Треугольная доменная структура $\overline{A} = 0.2\overline{A_0}$, $\overline{K} = 0.75\overline{K_0}$.

Следует заметить, что представленные на рисунках 2.17-2.18 доменные структуры можно получить из промежуточной путем постепенной трансформации. Например, трехполосная структура на рисунке 2.18 получится из промежуточной (рисунок 2.19) при уменьшении размера треугольных доменов, примыкающих к катетам треугольника.

На рисунке 2.20 изображена фазовая диаграмма, демонстрирующая значения параметров $\overline{A}$ и $\overline{K}$, дпускающщих равновесное существование различных доменных структур. Из диаграммы следует, что в случае малой кристаллографической анизотропии $\overline{K}$ и больших $\overline{A}$ (левый верхний угол) равновесное состояние стижим только при а конфиграммыурации, изображенной на рисунке 2.17. В случае, если $\overline{K}$ фиксирвано, а значение $\overline{A}$ уменьшается, такое состояние можно интерпретировать как увеличение размера монокристалла *L*, что соответствует левому нижнему углу диаграммы. Такое стояние при фиксированных магнитных свойствах материала *A, K* и M_S, закономерно приводит к увеличению числа доменов. Результатом являеттся появление многодоменной структуры изображенной на рисунке 2.19, включающей в себя домены различной формы. Если анизотропия $\overline{K}$ увеличиваеся, то возникает преимущественная ориентация намагниченности вдоль ОЛН. Это сопровождается уменьшением размеров примыкающих к левой и правой граням монокристалла треугольных доменов (рисунок 2.18). Увеличение количества полос с уменьшением $\overline{A}$ от двух (правый верхний угол) до трех (правый нижний угол) объясняется увеличением размера монокристалла.

Относительно доменных конфигураций за пределами границ изменения параметров $\overline{A}$ и $\overline{K}$, приведенных на диаграмме, можно сделать следующее замечание. При больших $\overline{A}$ (малых L) возможно только однодоменное состояние монокристалла. В этом случае при достаточно больших $\overline{K}$ намагниченность из-за высокой анизотропии ориентируется вдоль ОЛН, при малых $\overline{K}$ - в продольном направлении (вдоль оси Oz). В последнем случае ориентация в продольном направлении оказывается энергетически выгоднее поперечной, поскольку обеспечивает нулевую магнитостатическую энергию системы, понижение которой компенсирует рост энергии анизотропии. При малых $\overline{A}$ (больших L) можно ожидать появления новых доменных структур, однако такие вычисления требуют сеток с большим числом ячеек.

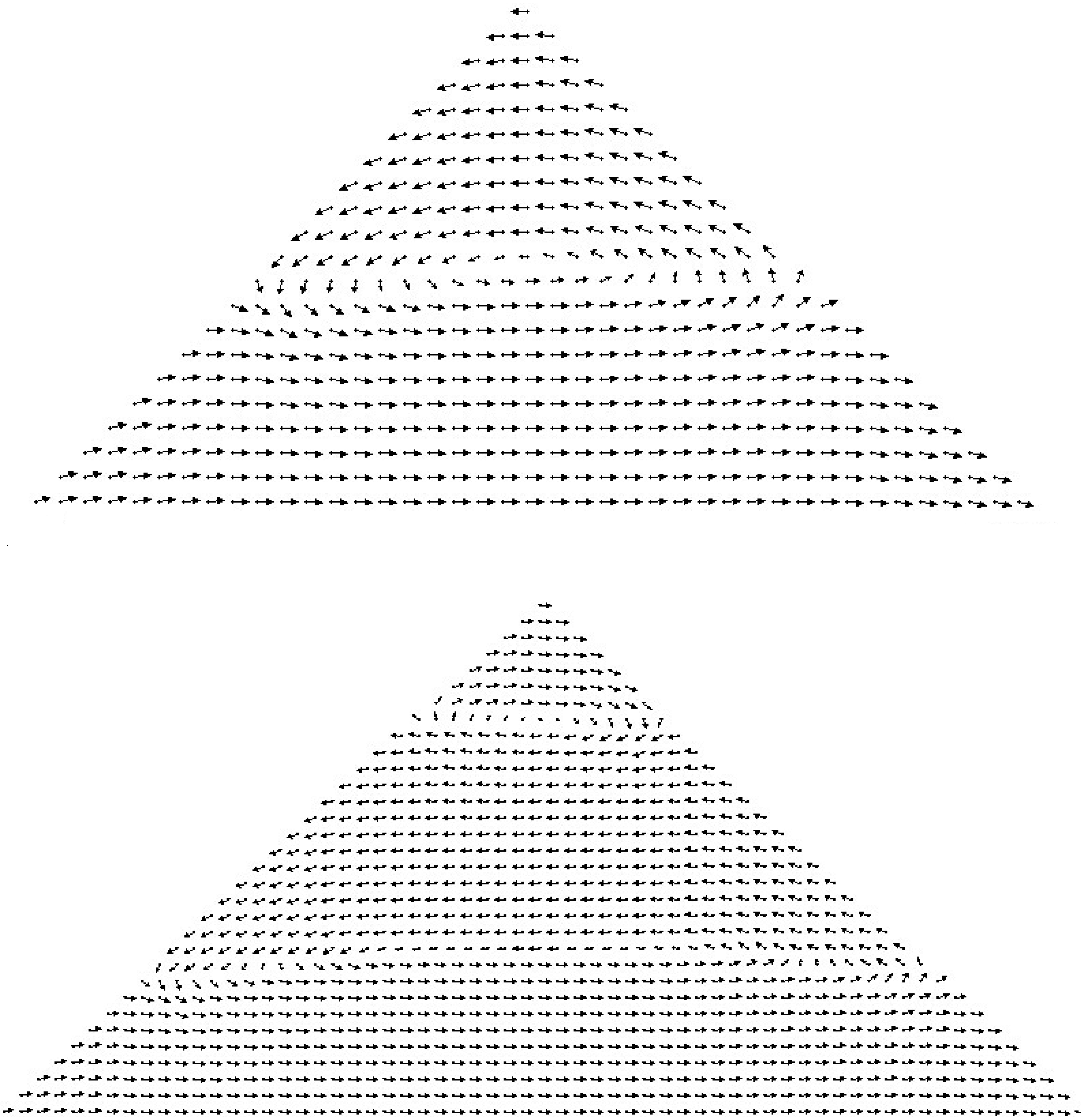


Рисунок 2.18 – Двухполосная ($\overline{A} = 1.1\overline{A_0}$, $\overline{K} = 2.0\overline{K_0}$) и трехполосная ($\overline{A} = 0.3\overline{A_0}$, $\overline{K} = 2.5\overline{K_0}$) доменные структуры.

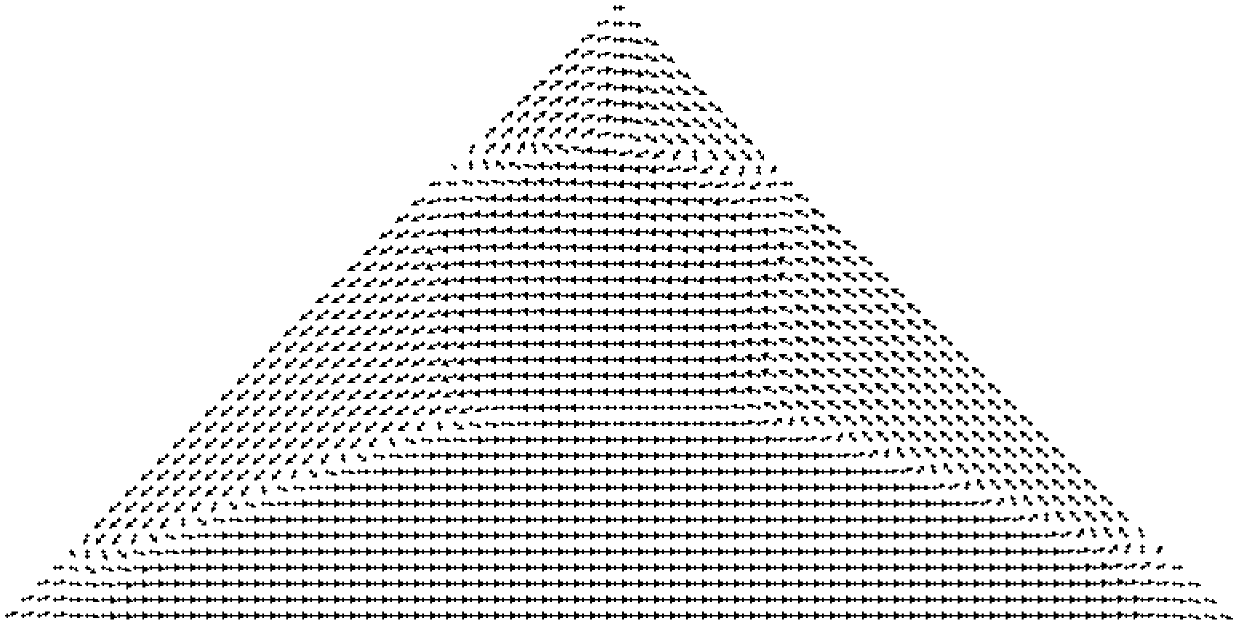


Рисунок 2.19 – Промежуточная доменная структура. Соответствующая данной структуре точка на фазовой диаграмме имеет координаты $(0.5\overline{K_0};0.1\overline{A_0})$.

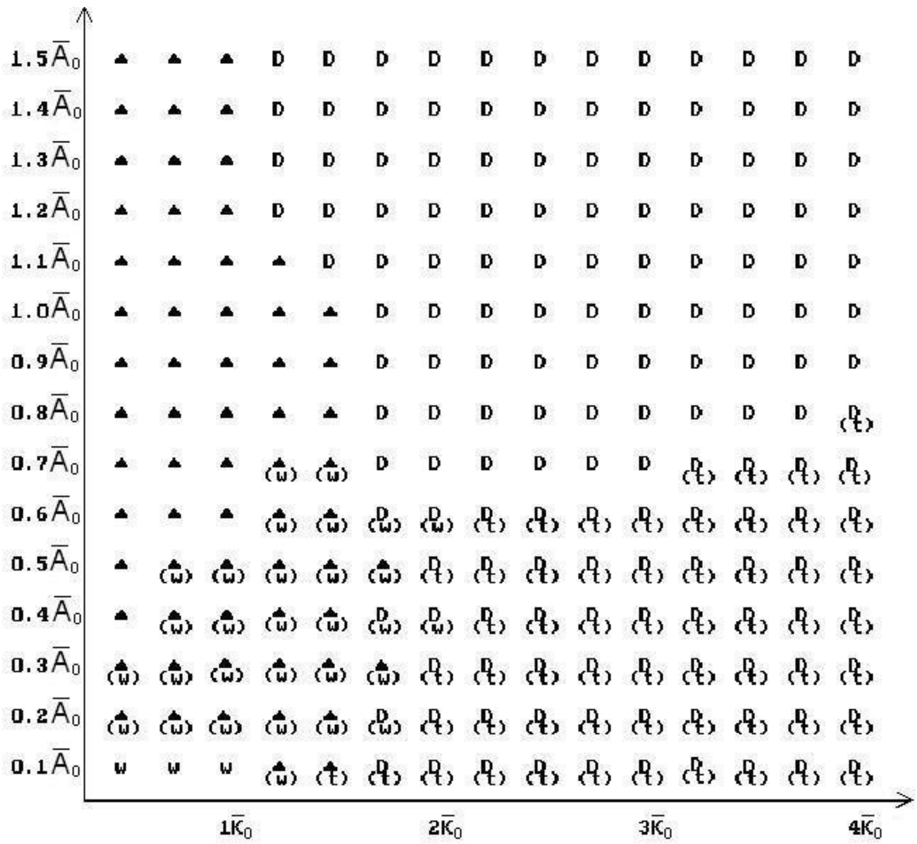


Рисунок 2.20 – Фазовая диаграмма. Символами представлены: ▲– треугольная доменная структура (рисунок 2.17), D – двухполосная доменная структура (рисунок 2.18), t – трехполосная доменная структура (рисунок 2.18), w – переходная доменная структура (рисунок 2.19). В скобки заключены метастабильные структуры.

Глава 3 Микромагнитное моделирование эффекта термического намагничивания

3.1 Эффект термического намагничивания

Весьма необычный эффект намагничивания при нагревании спеченных постоянных магнитов $SmCo_5$ в отсутствии внешнего магнитного поля, частично или полностью размагниченных обратным полем, впервые был описан в 1974 году в работе Б.Г. Лифшица, А.С. Лилеева и В.П. Менушенкова [76]. Результаты систематического исследования этого эффекта, названного термическим намагничиванием, на спеченных магнитах $SmCo_5$ были опубликованы в работе [77].

Исследование эффекта термического намагничивания проводится по схеме, представленной на рисунке 3.1. После намагничивания образца до насыщения в соответствующем по величине (достаточно большом) магнитном поле, включается размагничивающее поле величиной H_R, большей чем коэрцитивная сила H_C. Образец при этом частично перемагничивается. Затем внешнее магнитное поле отключается и образец переходит в полностью или частично размагниченное состояние (рисунок 3.1, часть I). Затем образец нагревается или охлаждается в отсутствии внешнего поля, и проводится измерение происходящего при этом увеличения намагниченности. Намагничивание образца с ростом температуры называют термическим намагничиванием (ТН) (рисунок 3.1 часть II.*a*), а рост намагниченности в результате охлаждения (рисунок 3.1 часть II.*b*) называют обратным термическим намагничиванием (ОТН).

В работах [76, 77] и последующих работах [78-86] термическое намагничивание спеченных магнитов объяснялось следующими механизмами:

- возвращением доменных границ, смещенных в процессе размагничивания образца, в результате термической активации в их исходное положение под действием внутреннего магнитостатического поля, создаваемого объемами сохранившими исходное состояние намагниченности;

- переходом некоторых перемагниченных обратным полем однодоменных кристаллитов при нагревании образца из однодоменного состояния в многодоменное;

- зависимостью «поля переключения» кристаллита, т.е. поля, при котором кристаллит полностью скачком изменяет направление намагниченности на противоположное, от температуры.

В соответствие с последним механизмом, при размагничивании обратным полем перемагничиваются кристаллиты с наиболее низкими полями переключения. При повышении температуры поля их переключения понижаются, и часть из них под действием внутренних магнитостатических полей «переключается», т.е. перемагничивается в перначальное направление.

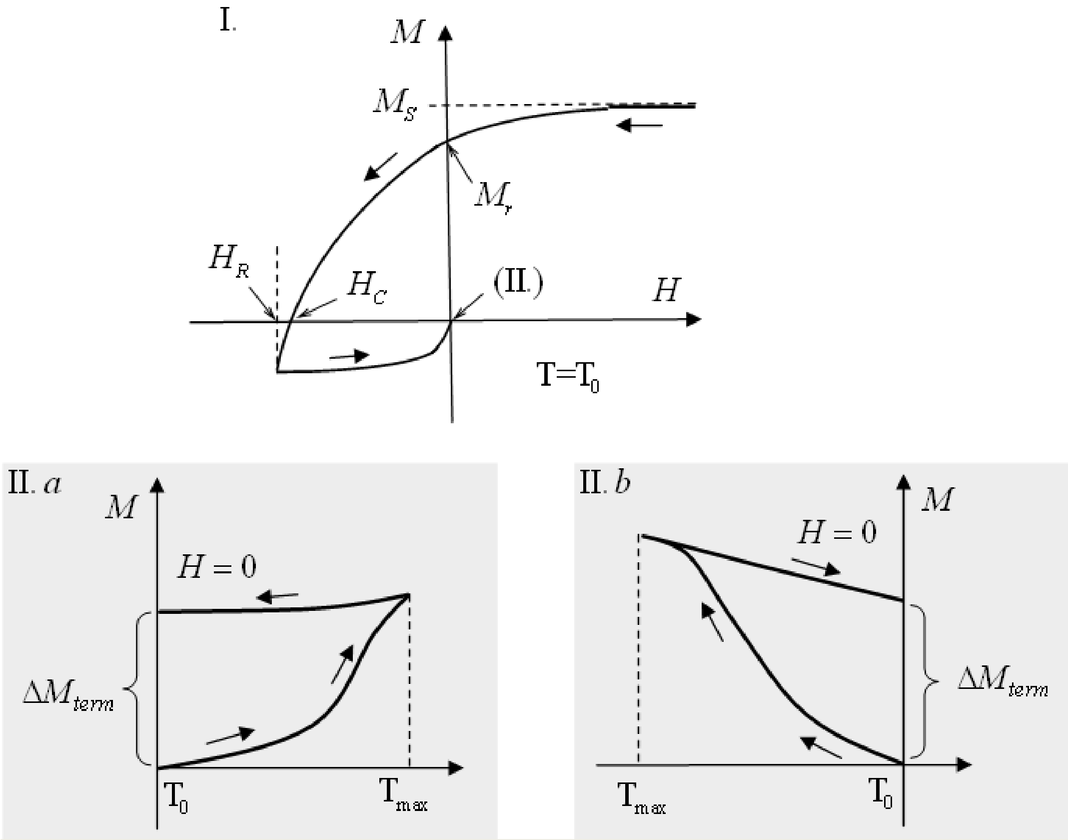


Рисунок 3.1 – Схемы проведения экспериментов по термическому намагничиванию ферромагнетиков. (I.) – этап размагничивания образца обратным полем величиной H_R при температуре T_0. (II.*a*) – увеличение температуры образца от T_0 до T_{max} и соответствующее его намагничивание в исходном направлении; (II.*b*) – уменьшение температуры образца от T_0 до T_{max} (обратное термическое намагничивание). Здесь ΔM_{term} - прирост намагниченности в ходе эксперимента. H_c - коэрцитивная сила.

Описанные выше механизмы термического намагничивания предполагали, что в спеченных магнитах кристаллиты представляют собой частицы ферромагнетика, покрытые немагнитными оболочками. Поэтому обменное взаимодействие между кристаллитами отсутствует, а термическое намагничивание происходит под действием собственных (магнитостатических) полей. В ряде работ [82, 87-98] проводилось моделирование термического намагничивания, которое основывалось на статистическом подходе, при котором система представлялась в виде ансамбля частиц, отличающихся некоторыми параметрами.

Позднее при исследовании сплавов $SmCo_5$ и $Nd_2Fe_{14}B$, полученных быстрой закалкой из жидкого состояния, нами был также обнаружен эффект их ТН [99,100]. Но в этом случае уже нельзя исключать влияние обменного взаимодействия между кристаллитами на эффект термического намагничивания. Поэтому появилась идея исследования ТН как результата совместного влияния обменного и магнитостатического взаимодействий. Для проверки этой идеи мы решили использовать достаточно простую модель многослойной стохастической системы (МСС).

3.2 Модель многослойной стохастической системы

Наиболее простым вариантом микромагнитного моделирования представляется одномерное приближение, в рамках которого проводят численные расчёты и в ряде случаев получают аналитические выражения авторы многих работ по микромагнетизму. Одномерное приближение предполагает, что поле намагниченности **m** зависит только от одной координаты, что упрощает численное моделирование, а в некоторых случаях позволяет получить аналитическое решение.

Для исследования магнитных свойств многослойных пленок, а также поликристаллических сплавов в рамках одномерного приближения наиболее часто используется является модель многослойной системы, в которой вектор намагниченности зависит только от координаты, ортогональной плоскости слоев. В качестве примера, можно привести работы [101-124], в которых она использовалась для моделирования процессов перемагничивания и изучения других магнитных свойств многослойных и поликристаллических систем. В большинстве перечисленных работ использовалось предположение, что поле намагниченности ориентируется в плоскости слоев системы, что исключало магнитостатическое взаимодействие между слоями, т.е. упрощала расчеты, но существенно сокращала область возможных объектов исследования и область использования полученных в данном приближении результатов. В работе [121] влияние магнитостатического взаимодействия, вызванного некомпланарностью поля намагниченности, учитывалось косвенно, через константы анизотропии. Учитывая вышесказанное, в настоящей работе для моделирования реальных поликристаллических сплавов выбрана модель многослойной стохастической системы с некомпланарными осями легкого намагничивания, учитывающая возникновение и влияние магнитостатических полей.

На рисунке 3.2 показана рассмотренная нами многослойная система [125, 126]. Она состояла из конечного числа плоскопараллельных неограниченных в плоскости слоев одноосного магнетика. Были рассчитаны системы с немагнитными прослойками между слоями и без прослоек, т.е. с обменной связью между слоями. Предполагалось, что магнитные параметры системы изменялись только вдоль координаты z, перпендикулярной плоскости слоев. Ориентация ОЛН в слоях изменялась случайным образом.

Функционал (1.1) многослойной системы (МСС), представленный на рисунке 3.2, можно представить (без учета поверхностной магнитной анизотропии) в безразмерном виде:

$$W=\int_0^1\left\{\frac{A}{M_s^2L^2}\left[\left(\frac{\partial m^x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial m^y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial m^z}{\partial z}\right)^2\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{K_1}{M_s^2}\left(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right)+\frac{K_2}{M_s^2}\left(1-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{m})^2\right)^2\right]+\frac{1}{2}m^z\frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{m}-\mathbf{m}\cdot\frac{\mathbf{H}_{ext}}{M_s}\right\}dz. \tag{3.1}$$

Здесь **m** - единичный вектор намагниченности. Параметры системы являются функциями координаты z, где $z=0$ и $z=1$ левая и правая (в единицах L) границы системы.

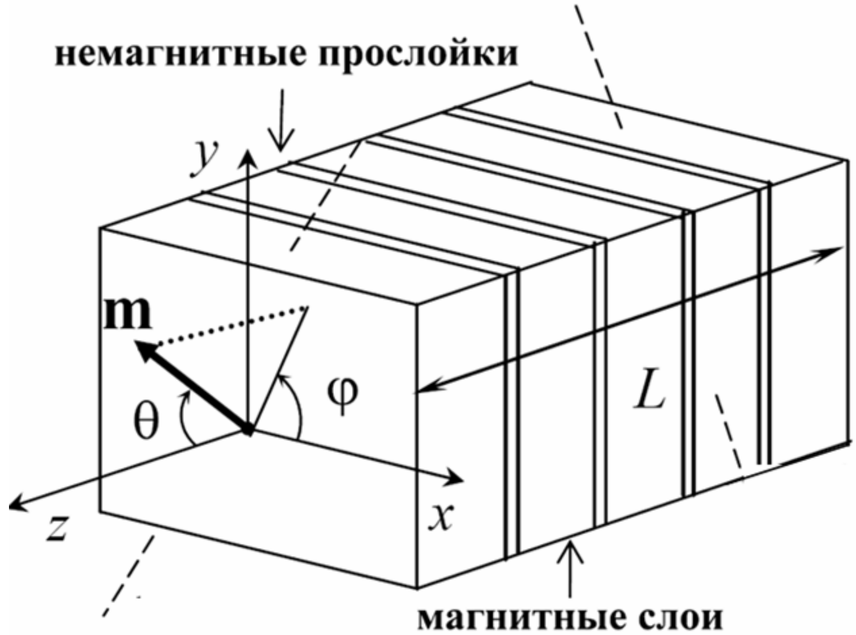


Рисунок 3.2 – Геометрия МСС. Здесь $0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$ – углы, определяющие вектор $\mathbf{m}$. Пунктирной линией показаны оси легкого намагничивания

Для выбранной модели эффективным методом вычисления потенциала оказалась интегральная формула (1.15), согласно которой в любой точке пространства магнитостатический потенциал U находится как сумма вклада источников, объемные и поверхностные плотности которых равны $q_v = -\dfrac{\partial m^z(z)}{\partial z}$ и $q_S = \pm m^z$ соответственно.

Пусть $[a,b]$ - любой слой системы. Пусть z^* - произвольная точка слоя $[a,b]$. Вычислим потенциал в точке z^* как сумму вклада объемных источников слоя и поверхностных источников левой (a) и правой (b) границ:

$$U(z^*) = 2\pi\int_a^b \frac{\partial m^z(z)}{\partial z}\left|z - z^*\right|dz - 2\pi(-m^z(a))\left|a - z^*\right| - 2\pi(m^z(b))\left|b - z^*\right| =$$

$$= 2\pi\left[\int_a^{z^*} m^z dz - \int_{z^*}^{b} m^z dz\right]. \tag{3.2}$$

Если точка z^* лежит вне слоя и $z^* > b$, то

$$U(z^*) = 2\pi\int_a^b \frac{\partial m^z(z)}{\partial z}\left|z - z^*\right|dz - 2\pi(-m^z(a))\left|a - z^*\right| - 2\pi(m^z(b))\left|b - z^*\right| = \\ = \int_a^b m^z dz = C, \tag{3.3}$$

где C – константа, не зависящая от z^*. Для точки z^*, лежащей левее точки a, также получаем формулу (3.3).

Из формул (3.2)-(3.3) следует, что формула (3.2) пригодна для вычисления потенциала в любой точке пространства. Формула (3.3) означает отсутствие поля за пределами слоя. Таким образом, в системе с немагнитными прослойками потенциал вычисляется по формуле:

$$U(z^*) = 2\pi\left[\int_a^{z^*} m^z dz - \int_{z^*}^b m^z dz\right], \tag{3.4}$$

где a и b границы слоя, которому принадлежит точка z^*. Если система без прослоек, то

$$U(z^*) = 2\pi\left[\int_0^{z^*} m^z dz - \int_{z^*}^1 m^z dz\right], \tag{3.5}$$

где z^* - точка любого слоя.

3.3 Термическое намагничивание системы с осями легкого намагничивания, ортогональными слоям

Рассмотрена многослойная система, состоящая из 50 слоев $Nd_2Fe_{14}B$, имеющая немагнитные прослойки (рисунок 3.2), которые исключают обменное взаимодействие между слоями, оси легкого намагничивания ориентированы ортогонально слоям [126, 127]. Моделирование микромагнитного поведения системы осуществляется минимизацией функционала (3.1), потенциал U вычисляется с помощью формулы (3.4).

Исходно задавалось размагниченное состояние системы, при котором векторы намагниченности соседних слоев были направлены анти параллельно. Значения констант магнитной анизотропии в слоях варьировалось последовательно $\{K_1, K_2\}$ и

$\{\xi K_1, \xi K_2\}$, где коэффициент ξ составлял 0.5 и 0.3. Изменение температуры задавалось через функциональную зависимость констант анизотропии K_1 и K_2 от температуры [121]. Другие параметры системы при этом оставались неизменными.

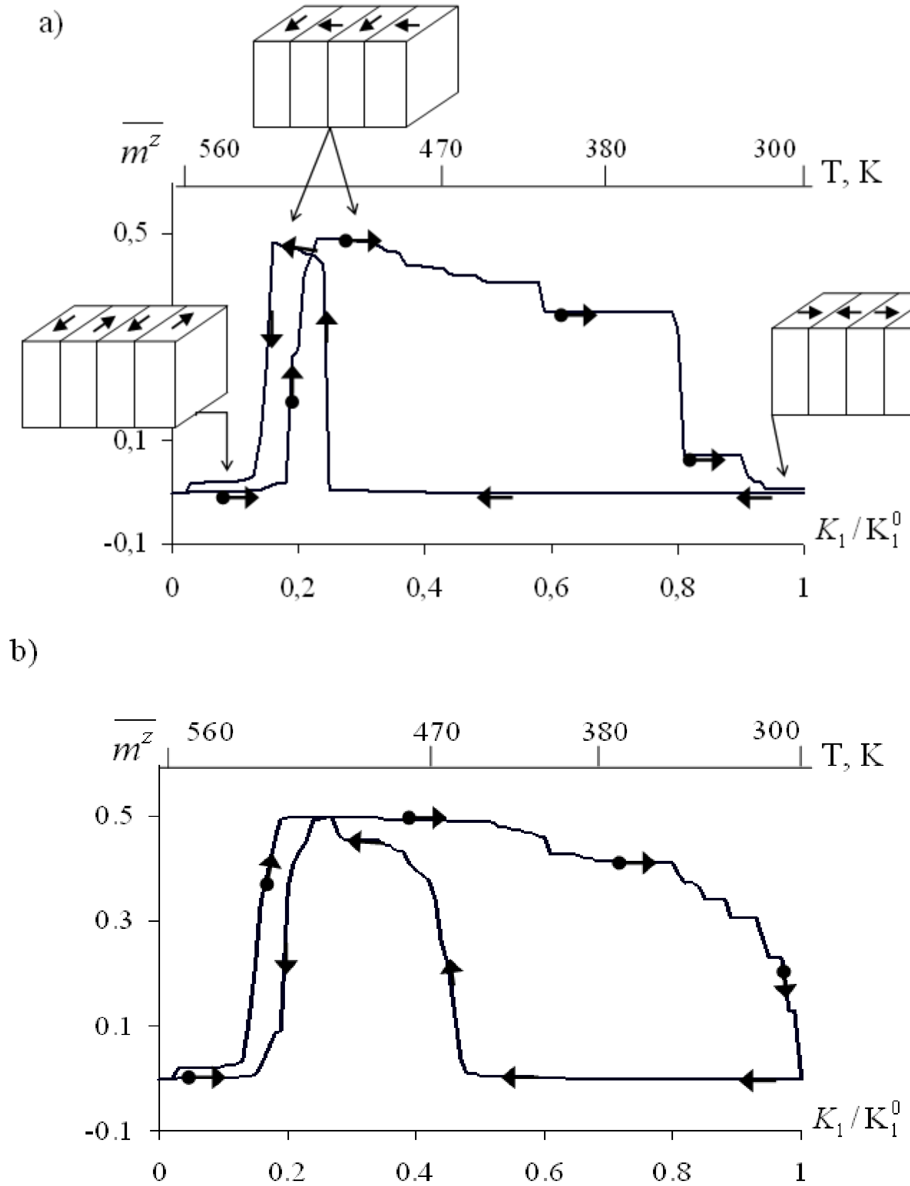


Рисунок 3.3 – Кривая изменения намагниченности системы из 50 слоев $Nd_2Fe_{14}B$ с магнитными параметрами: A=1.7$\times$10^{-6} Эрг/см, M_s=1275 Гс, K_1^0=4.5$\times$10^7 Эрг/см^3, K_2^0=6.6$\times$10^6 Эрг/см^3. Толщина слоя равна 1 нм, $K_1 / K_1^0 = K_2 / K_2^0$. Константы анизотропии в соседних слоях составляла последовательно (a) $\{K_1,\ K_2\}$ и $\{0.5K_1,\ 0.5K_2\}$; (b) $\{K_1,\ K_2\}$ и $\{0.3K_1,\ 0.3K_2\}$. Система показана упрощенно, состоящей из 4 слоев без прослоек. Знаками «$\longrightarrow$» «$\bullet\!\!\longrightarrow$» показано, соответственно, нагревание и охлаждение системы, $\overline{m^z} = \int_0^1 m^z(z)\, dz$.

Как показали расчеты, при повышении температуры намагниченность в системе возникает лишь в некотором диапазоне температур в следствии поворота векторов намагниченности **M** в слоях с малой анизотропией в плоскость слоев. Этот поворот происходит под действием магнитостатического взаимодействия между слоями и соответствует понижению свободной энергии за счет значительного уменьшения магнитостатической энергии системы при некотором увеличении энергии магнитной анизотропии. При дальнейшем росте температуры векторы намагниченности **M** и в высокоанизотропных слоях устанавливаются в плоскости слоев (в результате уменьшения констант их магнитной анизотропии). В итоге из-за случайной ориентации **M** в плоскости слоев образец размагничивается. При последующем уменьшении температуры ориентации векторов намагниченности изменяется аналогичным образом (в обратной последовательности). Только диапазон температур, в котором наблюдается намагниченность системы, немного смещается и существенно растягивается. В итоге система приходит в исходное размагниченное состояние. С уменьшением ξ температурный промежуток, в котором система находится в намагниченном состоянии растягивается, что связано с уменьшением магнитной анизотропии низкоанизотропных слоев, облегчающим разворот векторов **M** в плоскость слоев.

3.4 Термическое намагничивание системы с некомпланарными осями легкого намагничивания

Рассмотрена система из магнитных слоев без прослоек. Слои отличаются только направлением ОЛН, которые в каждом слое имеют случайную ориентацию. В данном случае наряду с магнитостатическим взаимодействием необходимо учитывать обменное взаимодействие между слоями [128, 129]. Роль магнитостатического взаимодействия зависит от степени некомпланарности осей легкого намагничивания в слоях системы. Степень некомпланарности ОЛН слоев задается параметром γ_{max}, который определяется максимальным значением случайно задаваемых углов отклонения ОЛН от плоскости слоев. Каких-либо других условий на стохастическую ориентацию ОЛН не накладывалось. Метод расчета, магнитные параметры материала и обозначения соответствуют разделу 3.3.

Исходное состояние системы (при комнатной температуре) моделировалось как размагниченное высокочастотным внешним магнитным полем направленным в плоскости слоев. Т.е. векторы намагниченности были случайно ориентированными в плоскости слоев. При переходе в равновесное состояние компланарная ориентация векторов намагниченности нарушается, в соответствии со случайной ориентацией осей легкого намагничивания, но размагниченное (или почти размагниченное) состояние системы сохраняется. Изменение температуры задавалось также каки в предыдущем случае, т.е. изменялись константы магнитной анизотропии при сохранении остальных параметров.

Моделирование проводилось для 5 случайных выборок углов отклонения ОЛН в слоях системы от плоскости слоев при каждом фиксированном параметре $\gamma_{\max}$. Величина ΔM_{term} рассчитывалась для каждой выборки. На рисунке 3.4 показана зависимость намагниченности от температуры для одной случайной выборки углов.

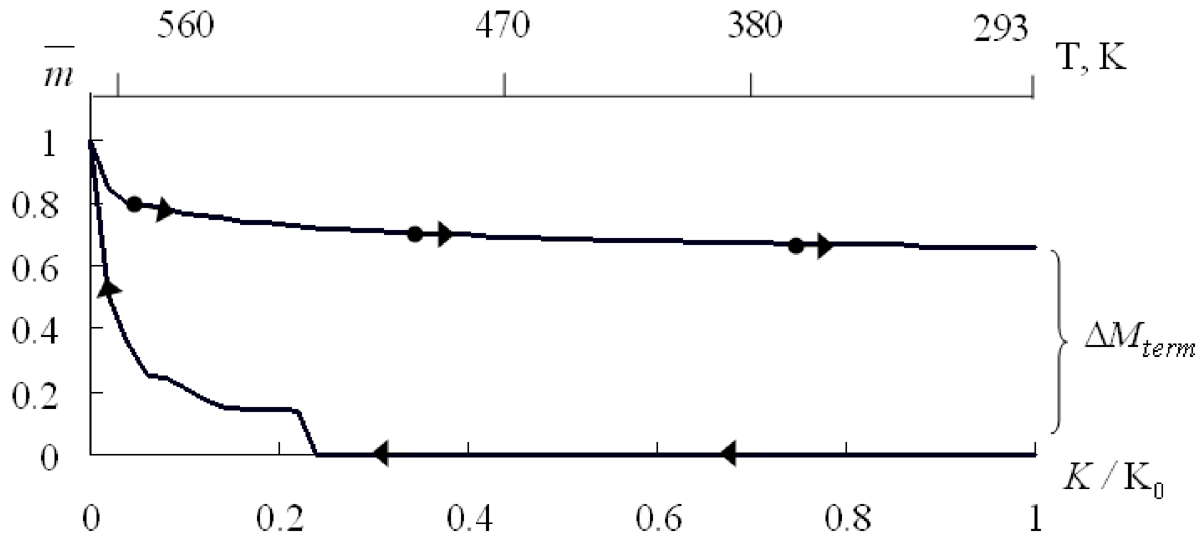


Рисунок 3.4 – Кривая изменения намагниченности системы $\bar{m} = \left| \int_0^1 \boldsymbol{m}(z)dz \right|$ в цикле нагрев-охлаждение при $\gamma_{\max} = 0.7$ рад. Толщина слоев равна 2 нм. Знаками «⟶» и «•⟶» показано, соответственно, нагревание и охлаждение системы.

Зависимость термического намагничивания ΔM_{term} от $\gamma_{\max}$ для 5 случайных выборок ориентации ОЛН представлена на рисунке 3.5. Как видно из рисунка, с увеличением отклонения осей легкого намагничивания от плоскости слоев т.е. повышением роли магнитостатического взаимодействия) ΔM_{term} уменьшается.

Природу эффекта ТН и его зависимости от параметра γ_{max} можно уяснить с помощью простой МСС, состоящей из 3 слоёв. Предположим, что в слоях 1,2 и 3 (рисунок 3.6 *a*) оси легкого намагничивания лежат в плоскости слоев ($\gamma_{max} = 0$), и повернуты друг относительно друга $\pi/3$ рад.

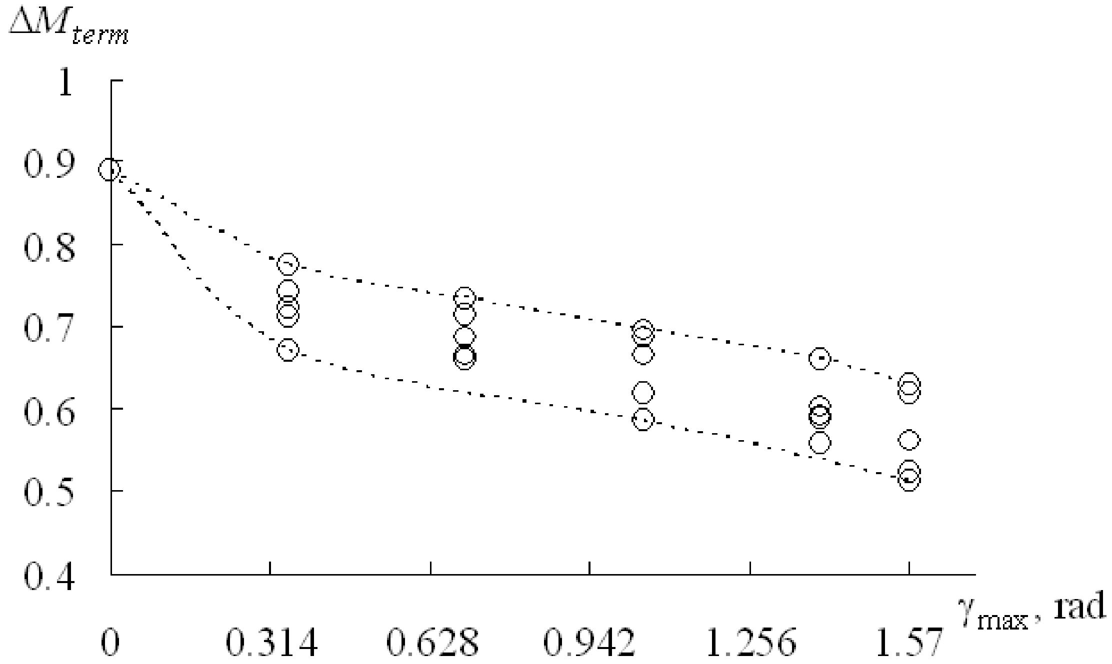


Рисунок 3.5 – Зависимость термического намагничивания ΔM_{term} от γ_{max} в системе при толщине слоев d = 1.0 нм.

В исходном размагниченном состоянии (при комнатной температуре) векторы намагниченности в каждом слое направлены по ОЛН так, что $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3 = \mathbf{0}$. При повышении температуры анизотропия слоев уменьшается, поэтому обменное взаимодействие стремится перевести систему в состояние насыщения намагниченности, т.е. ориентировать векторы намагниченности в одном направлении (рисунок 3.6*b*). При последующем охлаждения системы векторы намагниченности вновь устанавливаются вдоль ОЛН, но в слоях 1 и 3 их направление уже противоположно направлениям в исходном состоянии (рисунок 3.6*c*). При этом размагниченное состояние системы не восстанавливается и ее намагниченность, равная 2/3 от насыщения, направлена вдоль ОЛН слоя 2. Таким образом, размагниченная в исходном состоянии трехслойная система в результате нагревания и последующего охлаждения намагничивается.

Если ОЛН в слоях 1 и 3 отклонить на угол $\gamma < \pi/2$ в противоположные от плоскости слоев направления (при сохранении проекций осей на плоскость слоев), то после охлаждения системы суммарный вектор намагниченности $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_3$ будет по-прежнему направлен по вектору $\mathbf{m}_2$ (рисунок 3.6*d*), но он уменьшится из-за уменьшения суммы $\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_3$, которая стремится к нулевому вектору при $\gamma \to \pi/2$.

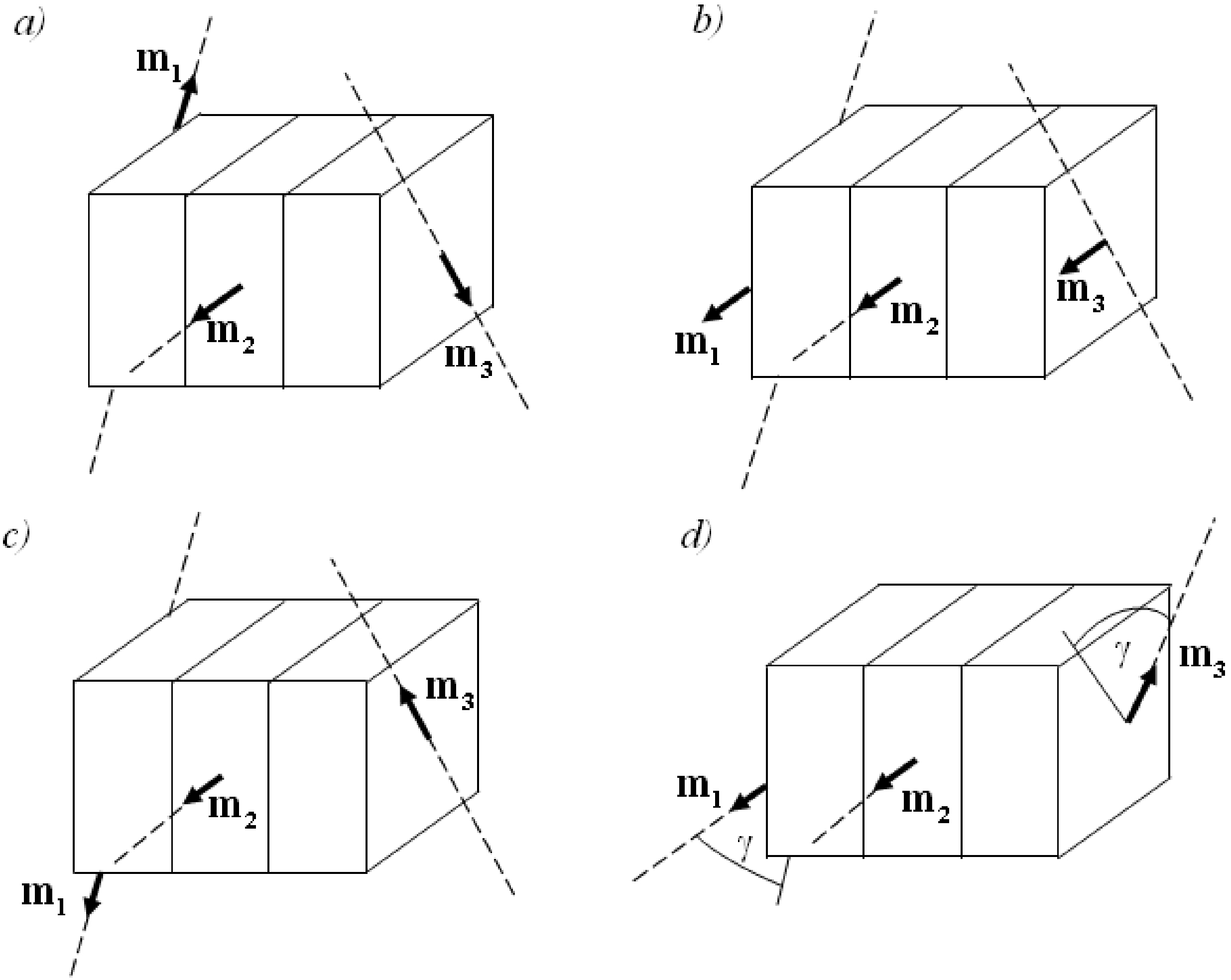


Рисунок 3.6 – Модельное представление ТН в трехслойной системе. Векторы $\mathbf{m_i}$ – намагниченность i-го слоя. Пунктирной линией показаны оси легкого намагничивания.

Таким образом можно сделать заключение, что ТН в многослойной системе может быть связано только с обменным взаимодействием, а магнитостатическое взаимодействие только препятствует намагничиванию системы. Но этот вывод справедлив не для всех систем. Так, например, в случае монокристалла стержнеобразной формы с поперечной ориентацией ОЛН, моделирование ТН свидетельствует о позитивной роли магнитостатического взаимодействия.

3.5 Эффект термического намагничивания в одноосном монокристалле

В работах, объясняющих появление термического намагничивания, и в приведенных выше примерах микромагнитного моделирования ТН в многослойных системах рассматривались возможные механизмы этого эффекта, связанные с поликристаллической структурой образца. Однако подобный эффект методом микромагнитного моделирования можно продемонстрировать и на одноосных монокристаллах. Причиной эффекта в данном случае является стержнеобразная форма монокристалла и расположение оси легкого намагничивания в плоскости поперечного сечения стержня.

Рассмотрены бесконечно длинные монокристаллические призмы $Nd_2Fe_{14}B$ и Co с сечениями $L \times L$, ориентированные вдоль оси *Oz*, а оси *Ox* и *Oy* системы отсчета перпендикулярны граням призмы [130, 131]. ОЛН призм ориентирована вдоль оси *Ox*. Предполагалось, что намагниченность **M** зависит только от координат *x* и *y*. Постановка и метод решения задачи (решение уравнения Ландау-Лифшица) описаны в разделе 2.2. Повышение температуры образца моделировалось уменьшением констант анизотропии K_1 и K_2 при неизменных прочих параметрах системы. Уменьшение констант K_1 и K_1 проводилось путем умножения их на температурный коэффициент K_T.

На рисунке 3.7 показан цикл нагрев-охлаждение монокристалла $Nd_2Fe_{14}B$, который моделировался уменьшением (нагрев) коэффициента K_T от 1 до 0.00018, а затем K_T вновь увеличивался (охлаждение) до 1. В расчетах использовались значения магнитных параметров $Nd_2Fe_{14}B$ и Co, приведенные в разделе 2.2.

Вычисления проводились на сетках, содержащих от 81×81 до 521×521 точек. Вектора **m**, которые отклонялся от горизонтальной оси *Ox* не более 45^0 изображались серой точкой, противоположно направленные – светлой, ориентированные преимущественно поперёк ОЛН – тёмной.

Расчеты показали, что механизм термического намагничивания крупных монокристаллов $Nd_2Fe_{14}B$ и Co с размерами $L = 2d_c$, т.е. равными соответственно 600 нм и 130 нм, одинаков. Нагревание однородно намагниченного вдоль ОЛН монокристалла $Nd_2Fe_{14}B$ приводит к появлению пятиполосной доменной структуры (точка 1 на кривой), которая трансформируется в трехполосную (точка 2). В некоторый момент появляется, а затем возрастает продольная составляющая намагниченности $\overline{m^z} = \iint\limits_{\mathbf{D}} m^z(x,y)dxdy$, где **D** – безразмерное поперечное сечение. В результате монокристалл намагничивается по продольной оси. При охлаждении процесс идет в обратном направлении, но по другой траектории и с другими доменными структурами (точки 3-6). В холодном состоянии образец размагничен благодаря двухполосной доменной структуре (точка 6). Монокристалл Co в процессе нагревание-охлаждение ведет себя аналогично, за исключением того, что доменная структура в нем образуется в самом начале процесса (без нагревания). Намагничивание образца при нагревании и размагничивание при охлаждении объясняются формой монокристалла, при которой намагниченному в продольном направлении состоянию соответствуют минимумы обменной и магнитостатической энергии системы. Поэтому при нагревании, из-за уменьшения констант K_1 и K_2, роль анизотропии системы понижается, и поле намагниченности стремится к продольной ориентации.

Монокристаллы $Nd_2Fe_{14}B$ и Co с малыми поперечными размерами ($L = 0.05d_C$) на нагревание реагируют различно. Как показано в разделе 2.2, в монокристалле Co размером $L = 0.2d_c \approx 13$нм величина $\overline{m^z}$ составляет 0.96, что означает квазиоднодоменное состояние с намагниченностью вдоль оси Oz.

Уменьшение констант анизотропии только усиливает продольную ориентацию поля намагниченности и существенно на величину $\overline{m^z}$ не влияет.

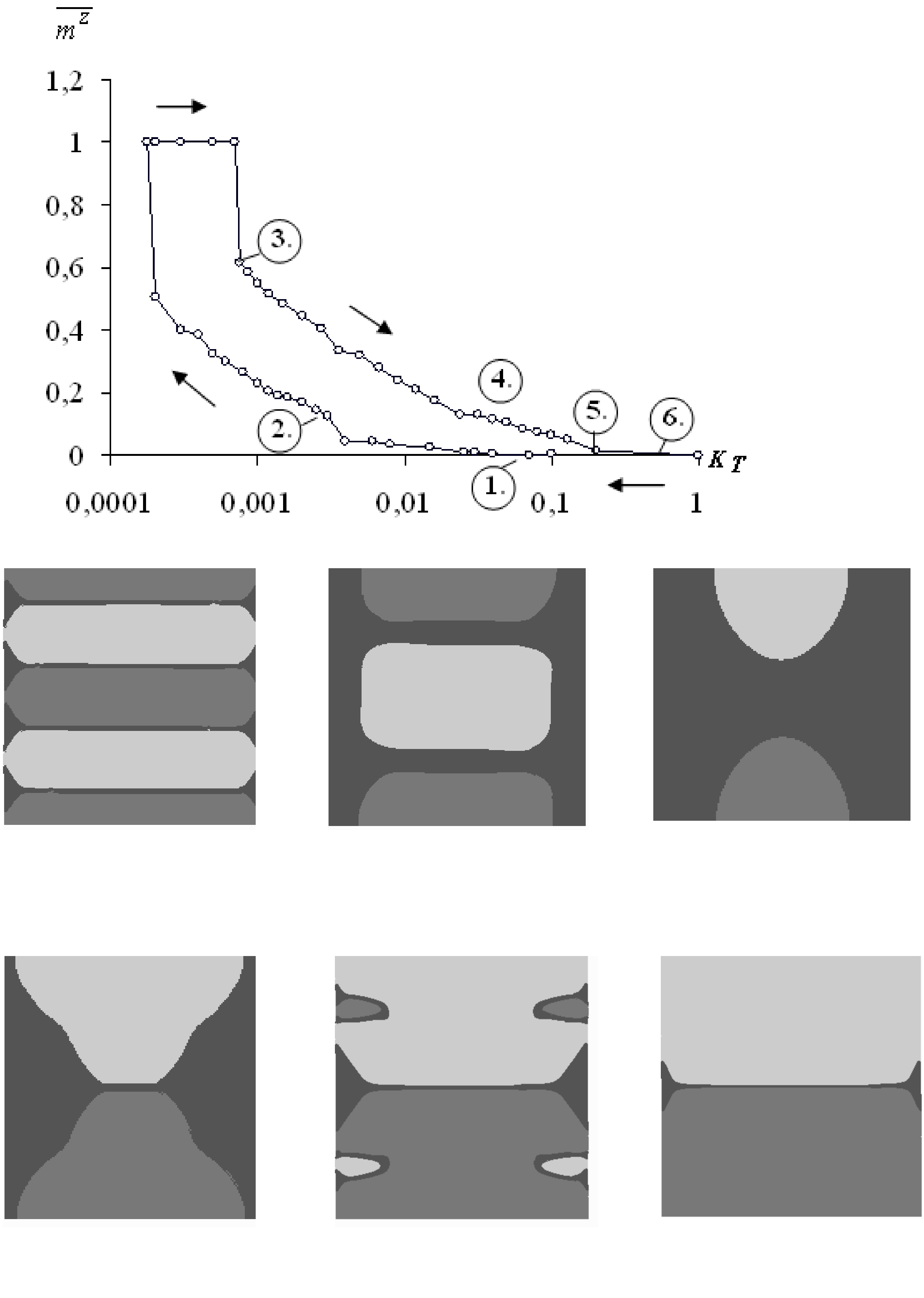


Рисунок 3.7 – Зависимость продольной составляющей $\overline{m^z}$ намагниченности монокристалла $Nd_2Fe_{14}B$ размером $L = 600\ нм$ от температурного коэффициента $\boldsymbol{K_T}$ в процессе нагревание-охлаждение». 1, 2, …, 6 – доменные структуры, соответствующие отмеченным на кривой точкам.

Для монокристалла $Nd_2Fe_{14}B$ размером $L = 21$ нм представлены результаты полученные на сетке 81×81 точек. В начальном состоянии При комнатной температуре, т.е. в исходном состоянии, векторы **m** считались случайно ориентированными в плоскости поперечного сечения. Это соответствовало размагничиванию образца высокочастотным внешним полем, направленным в плоскости поперечного сечения монокристалла. Случайные выборки распределения векторов **m** приводили либо к стабильному однородно намагниченному по оси *Ox* состоянию, либо к метастабильному слабо намагниченному по оси *z* двухдоменному состоянию. Последнее использовалось в качестве исходного для процесса нагрев-охлаждение (рисунок 3.8). При этом, как и ранее, коэффициент K_T уменьшался (нагрев) от 1 до 0.085, а затем увеличивался (охлаждение) до 1.

Нагрев монокристалла приводит к увеличению намагниченности монокристалла $\overline{\mathbf{m}} = \iint\limits_{\mathbf{D}} \mathbf{m}\,dxdy$ в продольном направлении. При K_T=0.138 намагниченность скачком возрастает до насыщения ($\overline{m} = |\overline{\mathbf{m}}| = 1$) и поворачивается перпендикулярно оси *Ox*. При дальнейшем повышении температуры (до K_T=0.085) намагниченности вновь поворачивается к продольному направлению.

Увеличение K_T от 0.085 до 0.138 (начало охлаждения) сопровождается поворотом намагниченности к оси *Ox* с сохранением состояния. При дальнейшем повышении K_T до 1 (понижении температуры) состояние намагниченности не изменяется. Т. е. в результате процесса нагрев-охлаждение образец переходит в стабильное однородной намагниченности вдоль оси *Ox* состояние. Повторные циклы нагрев - охлаждение приводят только к вращению вектора намагниченности. При низкой температуре из-за высокой магнитной анизотропии энергетически выгодна ориентация намагниченности вдоль ОЛН (оси *Ox*). Повышение температуры приводит к понижению констант магнитной анизотропии, поэтому энергетически выгодной становится продольная ориентация намагниченности, при которой минимальна магнитостатическая энергия системы.

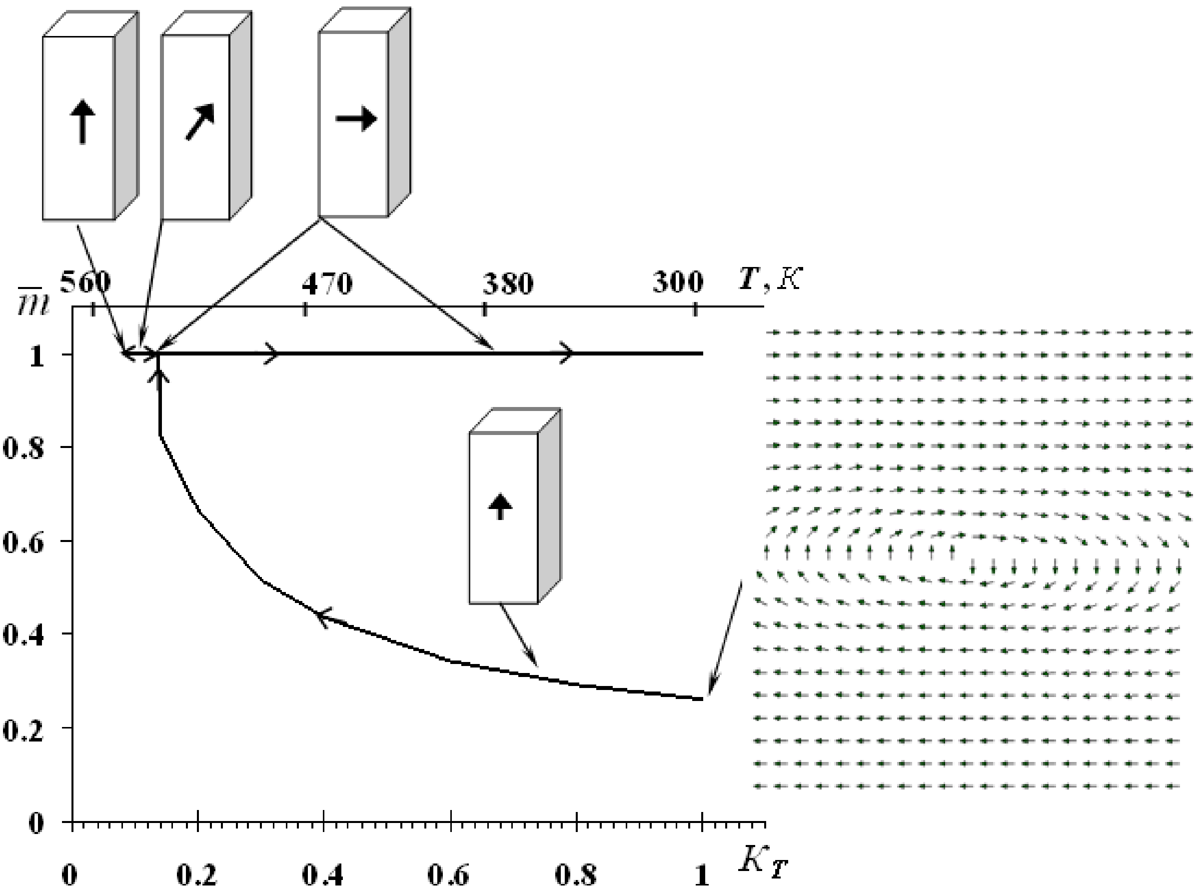


Рисунок 3.8 – Изменение состояния намагниченности монокристалла $\overline{m} = |\overline{\mathbf{m}}|$ в процессе нагревания и последующего охлаждения. Справа показана проекция начального состояния намагниченности **m** на сетку 21×21 в плоскости поперечного сечения.

Изменение состояния намагниченности в цикле нагрев - охлаждение зависит от размера монокристалла. Так у монокристалла с $L = 12\,нм$ возможно лишь одно равновесное состояние – однодоменное. Поэтому нагревание и последующее охлаждение образца сопровождается вращением вектора намагниченности без изменения величины. А у монокристалла с $L = 24.1\,нм$ зависимость намагниченности от температуры при нагревании аналогична показанной на рисунке 3.8, но при охлаждении образец переходит в первоначальное метастабильное двухдоменное состояние, т.е. размагничивается. Т.е. изменение намагниченности монокристалла $Nd_2Fe_{14}B$ с $L = 24.1\,нм$ в процессе нагрев - охлаждение качественно соответствует представленному на рисунке 3.7 (для монокристалла с $L = 600\,нм$). Таким образом эффект термического намагничивания в монокристаллах $Nd_2Fe_{14}B$ возможен только для некоторого диапазона размеров L от ~ *12 нм* до ~ *24нм*.

В заключение главы следует заметить, что с точки зрения микромагнетизма эффект термического намагничивания нельзя назвать «необычным», «странным» и действительно, если для простоты анализа ограничиться только первой константой анизотропии, т.е. считать $K_2 = 0$, то без учета поверхностной анизотропии и в отсутствии внешнего поля решение задач для геометрически подобных систем будет зависеть от трех безразмерных коэффициентов $\frac{A}{M_s^2 L^2}$, $\frac{K_1}{M_s^2}$ и 1, определяющих, соответственно, роль обменного взаимодействия, анизотропии и собственного (магнитостатического) поля в формировании поля намагниченности системы. При изменении температуры (не обязательно повышении) роли этих коэффициентов могут измениться, что приведет к изменению поля намагниченности. В результате величина магнитного момента системы может значительно увеличиться, т.е. произойдет термическое намагничивание (или обратное термическое намагничивание). При возвращении к исходной температуре величина магнитного момента может полностью или частично вернуться к исходному значению или остаться на уровне максимального значения, достигнутого в процессе намагничивания. Примеры такого поведения систем были рассмотрены выше. В этих примерах изменялся только второй безразмерный коэффициент (за счет константы анизотропии), но подобных эффектов можно ожидать и в других случаях. Например, при одновременном изменении первого и второго коэффициентов за счет параметра M_s.

Глава 4 Микромагнитное моделирование распределения намагниченности в полубесконечных монокристаллах

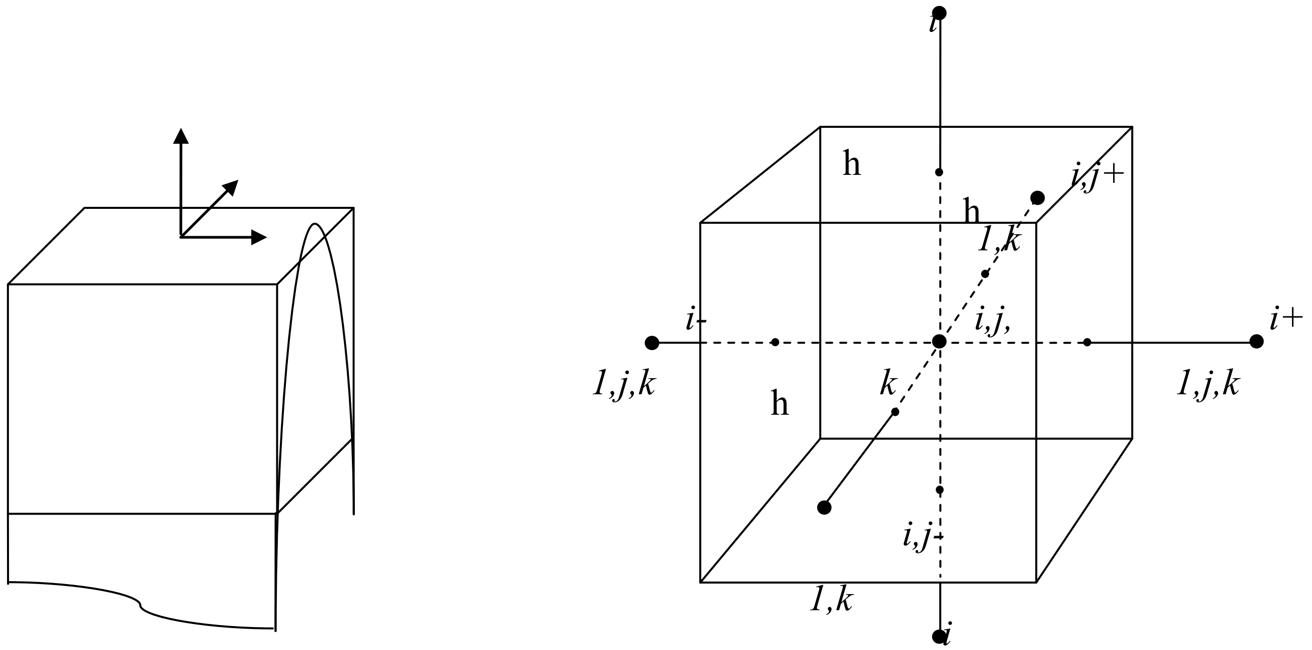
4.1 Метод расчета

В ряде случаев при расчетах распределения намагниченности **M** в длинных стержнеобразных монокристаллах можно предполагать, что вдали от торцов распределение намагниченности одинаково в любом поперечном сечении стержня, т.е. является двумерным. Однако вблизи торцов эти предположения могут не выполняться и для расчета распределения намагниченности в областях, прилегающих к торцам стержня, требуется решение трехмерной задачи. В настоящей работе предлагается метод решения такой задачи [62], основанный на разделении стержня на две части. Таким образом для области **D**, прилегающей к торцу стержня (рисунок 4.1а), находится численное решение трехмерной задачи при условии, что в полубесконечной части стержня ниже области **D** распределение намагниченности в любом поперечном сечении совпадает с распределением на нижней границе области **D**.

С помощью этого метода, в качестве примера, проведен расчет бесконечно длинной монокристаллической призмы одноосного ферромагнетика с квадратным поперечным сечением $L \times L$. Расположение координатной системы представлено на рисунке 4.1. Распределение **M** в области **D** рассчитывалось путем нахождения стационарных решений уравнения Ландау-Лифшица (1.11). В отсутствии внешнего поля это уравнение можно представить в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff} - \lambda\, \mathbf{m} \times \left(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff}\right), \qquad (4.1)$$

где $\tau = t|\gamma'|M_s$, $\mathbf{h}_{eff} = -\nabla U + \dfrac{2A}{M_s^2 L^2}\Delta\mathbf{m} + \mathbf{w}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{w})(2K_1 + 4K_2(1-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{w})^2))/M_s^2$ – безразмерный вектор эффективного поля.



а)

Рисунок 4.1 – а) Расположение расчетной области **D** и координатной системы; б) Объемная ячейка.

На гранях призмы **D** для уравнения (4.1) использовалось граничное условие: $\partial\mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$, где **n -** единичная внешняя нормаль к поверхности кристалла Это условие означает отсутствие поверхностной анизотропии на верхней и боковых гранях, а на нижней – неизменность распределения намагниченности **m** вдоль стержня (в этом случае **n** - нормаль к нижней грани призмы **D**). Ниже приводятся данные полученные при $\lambda = 0.15$.

Координатное пространство при численном решении задачи заполняется равномерной сеткой с шагом *h*, ячейка которой с центром в узле (i, j, k) показана на рисунке 4.1б. Индексы *i, j* и *k* возрастают в направлениях координат *x, y* и *z* соответственно. Далее по тексту центр ячейки будем обозначать одной буквой – *N*. Для решения уравнения (4.1) использовалась обычная явная конечно-разностная схема, аппроксимирующая (4.1) во внутренних узлах области с порядком $O(\delta\tau + h^2)$, где $\delta\tau$ - постоянный временной шаг схемы. Условие $\partial\mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$ на границе **D** аппроксимировалось с порядком $O(h)$.

Вычисление потенциала собственного поля строилось на основе формулы (2.12), записанной в безразмерной форме:

$$\iint\limits_{S_h} \nabla U \cdot \mathbf{n}_h dS = 4\pi \iint\limits_{S_h} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_h dS, \qquad (4.2)$$

где в данном случае S_h - поверхность кубической ячейки, а $\mathbf{n}_h$ - внешняя нормаль к поверхности ячейки (рисунок 4.1б). В качестве расчетной области для потенциала выбиралась призма $\mathbf{D}^*$, верхняя и боковые грани которой располагались в пустом пространстве параллельно соответствующим граням призмы **D** на расстоянии нескольких шагов h, а нижняя грань содержала нижнюю грань **D**. Сеточное уравнение для потенциала получено методом, который использовался в разделе 2.1. В данном случае замена интегралов в (4.2) дискретными аналогами дает:

$$U_{i-1,j,k} + U_{i+1,j,k} + U_{i,j-1,k} + U_{i,j+1,k} + U_{i,j,k-1} + U_{i,j,k+1} - 6U_N = F_N. \qquad (4.3)$$

Для внутренних сеточных узлов расчетной области $\mathbf{D}^*$ функцию F_N в правой части уравнения (4.3) можно записать, используя обозначения $\delta_N^x = m_{i+1,j,k}^x - m_{i-1,j,k}^x$, $\delta_N^y = m_{i,j+1,k}^y - m_{i,j-1,k}^y$, $\delta_N^z = m_{i,j,k+1}^z - m_{i,j,k-1}^z$, следующим образом. Для точек N, лежащих внутри призмы **D**: $F_N = 2\pi h(\delta_N^x + \delta_N^y + \delta_N^z)$. Для точек N в пустом пространстве: $F_N = 0$. Для не лежащих на ребрах (регулярных) точек верхней и боковых граней призмы **D**: $F_N = \pi h(-4\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} + \delta_N^p + \delta_N^q)$, где p и q индексы координатных осей, ортогональных к вектору нормали **n**. Так, например, если узел N лежит на правой грани, то $\mathbf{n} = (1,0,0)$, $p = y,\ q = z$. В результате получаем: $F_N = \pi h(-4m_N^x + \delta_N^y + \delta_N^z)$. Если узел лежит на боковых или верхних ребрах (но не является вершиной трехгранного угла), то $F_N = \pi h(-2\mathbf{m}_N \cdot (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B) + \delta_N^p / 2)$, где $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$ - внешние нормали граней, образующих ребро, а p – индекс координатной оси, ортогональной векторам $\mathbf{n}_A$ и $\mathbf{n}_B$. Например, для правого верхнего ребра: $\mathbf{n}_A = (1,0,0), \mathbf{n}_B = (0,0,1), p = y$. В результате: $F_N = \pi h(-2(m_N^x + m_N^z) + \delta_N^y / 2)$. Для четырех трехгранных углов, примыкающих к верхней грани: $F_N = -\pi h \mathbf{m}_N \cdot (\mathbf{n}_A + \mathbf{n}_B + \mathbf{n}_C)$, где $\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B$ и $\mathbf{n}_C$ - внешние нормали граней, образующих трехгранный угол с вершиной в точке N. Например, для переднего правого угла:

$$\mathbf{n}_A = (1,0,0), \mathbf{n}_B = (0,-1,0), \mathbf{n}_C = (0,0,1) \text{ и } F_N = -\pi h(m_N^x - m_N^y + m_N^z).$$

Вычисление F_N на нижней грани призмы **D** не требуется, поскольку эта грань является частью границы расчетной области $\mathbf{D}^*$ для потенциала U.

Формула (4.3) аппроксимирует безразмерную форму уравнения (1.13) с порядком $O(h^2)$ внутри и снаружи призмы **D**, а условие (1.14) с порядком $O(h)$ в регулярных точках граней. Сеточную функцию $q_N^h = -F_N/(4\pi h^2)$ можно рассматривать в качестве дискретного аналога объемной плотности источника потенциала q. Причем, если внутри призмы **D** функция q_N^h является обычной аппроксимацией объемного источника $-\nabla\cdot\mathbf{m}$, то на ее гранях q_N^h - эффективный источник, учитывающий поверхностный источник с плотностью $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}$.

Для уравнения (4.3) на границе расчетной области $\mathbf{D}^*$ ставилось условие Дирихле (задавался потенциал), который вычислялся как сумма

$$U = U^D + U^\infty, \tag{4.4}$$

где U^D- вклад области **D**, а U^∞- вклад полубесконечной части стержня, расположенной ниже области **D**. Поскольку при построении сеточного уравнения (4.3) поверхностный источник потенциала учитывался через эффективный объемный источник, то вычисление функций U^D и U^∞ проводилось по формулам ньютоновского потенциала [6] как результат вклада только объемного источника q. Для вклада области **D** формула ньютоновского потенциала имеет вид:

$$U^D(\mathbf{r}_0) = \iiint\limits_{\mathbf{D}} q(x,y,z)/|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\,dxdydz\,, \tag{4.5}$$

где $\mathbf{r}_0$- точка (радиус-вектор), в которой вычисляется потенциал, а $\mathbf{r}=(x,y,z)$- переменная интегрирования из области **D**.

Для вычисления U^∞ рассмотрим потенциал $U^l(\mathbf{r}_0)$, создаваемый отрезком стержня $z_d \le z \le z_u$ с поперечным сечением **G**, в котором функция q зависит только от координат x и y. В соответствие с формулой ньютоновского потенциала можно записать:

$$\begin{aligned} U^l(\mathbf{r}_0) &= \iint\limits_{\mathbf{G}} q(x,y)\,dxdy \int\limits_{z_d}^{z_u} \left(a^2 + (z-z_0)^2\right)^{-0.5} dz = \\ &= \iint\limits_{\mathbf{G}} q(x,y) \ln \frac{z_u - z_0 + \sqrt{(z_u-z_0)^2 + a^2}}{z_d - z_0 + \sqrt{(z_d-z_0)^2+a^2}}\,dxdy, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $a^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Предельный переход в формуле (4.6) при $z_d \to -\infty$ дает бесконечность для подынтегральной функции во всех точках (x, y), где $q(x, y) \neq 0$, кроме, быть может, одной – (x_0, y_0), в которой при $z_0 > z_u$ подынтегральная функция не определена. Для устранения особенности воспользуемся тем, что потенциал можно вычислять с точностью до функции, не зависящей от $\mathbf{r}_0$. Вычитая из выражения (4.6) функцию $\iint\limits_{\mathbf{G}} q(x, y) \ln\left(2|z_d|\right) dxdy$ и вычисляя предел при $z_d \to -\infty$, получаем:

$$U^{\infty}(\mathbf{r}_0) = -\iint\limits_{\mathbf{G}} q(x, y) \ln\left(\sqrt{(z_0 - z_u)^2 + a^2} + z_0 - z_u\right) dxdy\,. \qquad (4.7)$$

В данном случае сечением **G** является безразмерный квадрат 1×1, а в качестве координаты z_u выбирается *z* координата нижней грани области **D**. При построении дискретных аналогов интегралов (4.5) и (4.7) объемная плотность q заменялась сеточной функцией q_N^h, причем для интеграла (4.7) вместо функции $q(x, y)$ использовались значения q_N^h, лежащие на шаг h выше нижней грани области **D**. Учитывалось, что в точках $\mathbf{r}_0$, лежащих на нижней грани области **D**, эти интегралы имеют особенность (несобственные второго рода).

Следует отметить, что суть предлагаемого метода заключается в описанном ранее алгоритме вычисления потенциала, который можно упростить. Например, призму **D** можно выбрать в качестве расчетной области потенциала. Следовательно в этом случае (4.3) не требуется вычислять правую часть уравнения (4.3) на границе **D**. Также вместо построения дискретного аналога уравнения Пуассона можно вычислять потенциал с использованием тех или иных интегральных формул по всем точкам области **D**. в данном случае выбор алгоритма основан на соображениях (часть которых рассматривалась в первой главе) приводимых ниже.

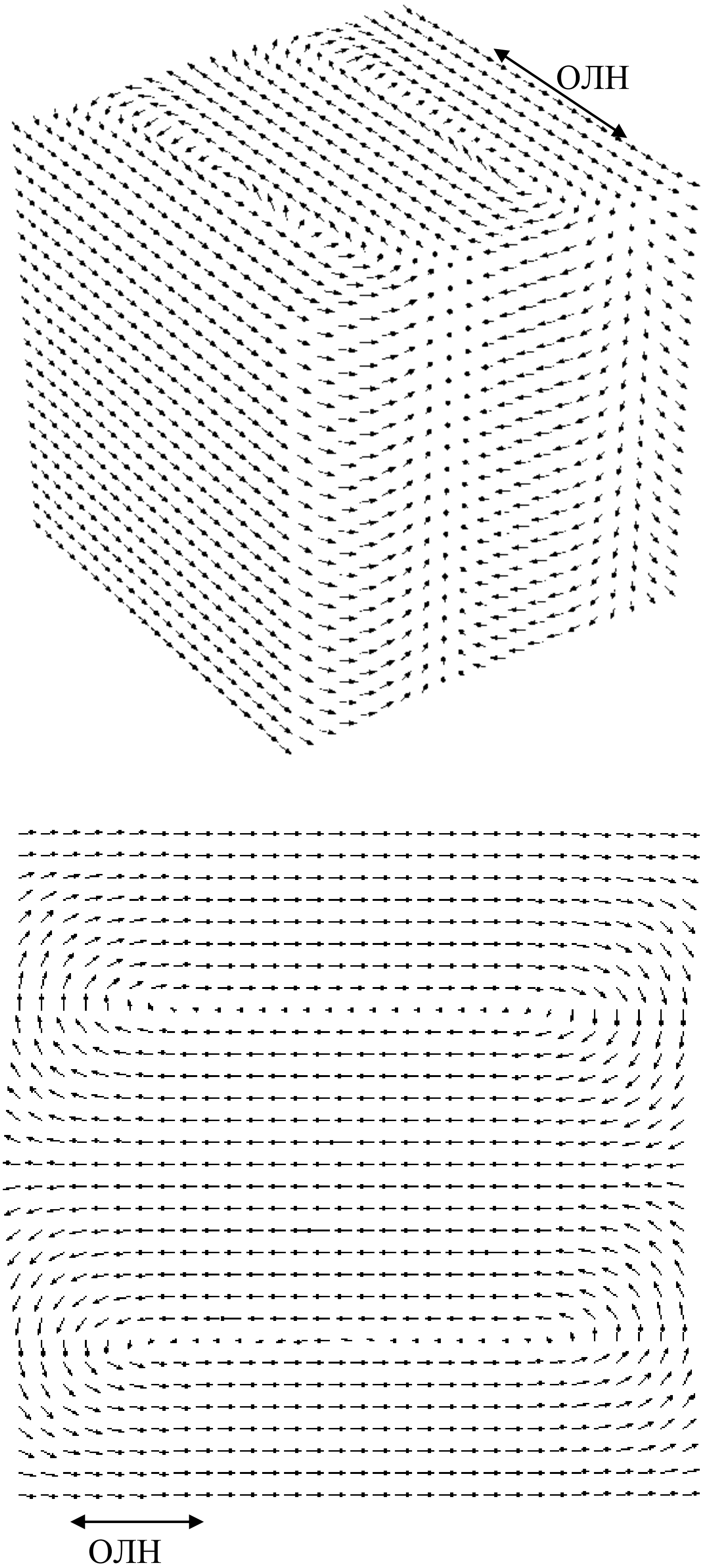


Рисунок 4.2 – Распределение намагниченности в торцевой части (вверху) и в глубине (внизу) монокристалле Co, которое получено из исходно однородно намагниченного вдоль оси легкого намагничивания состояния.

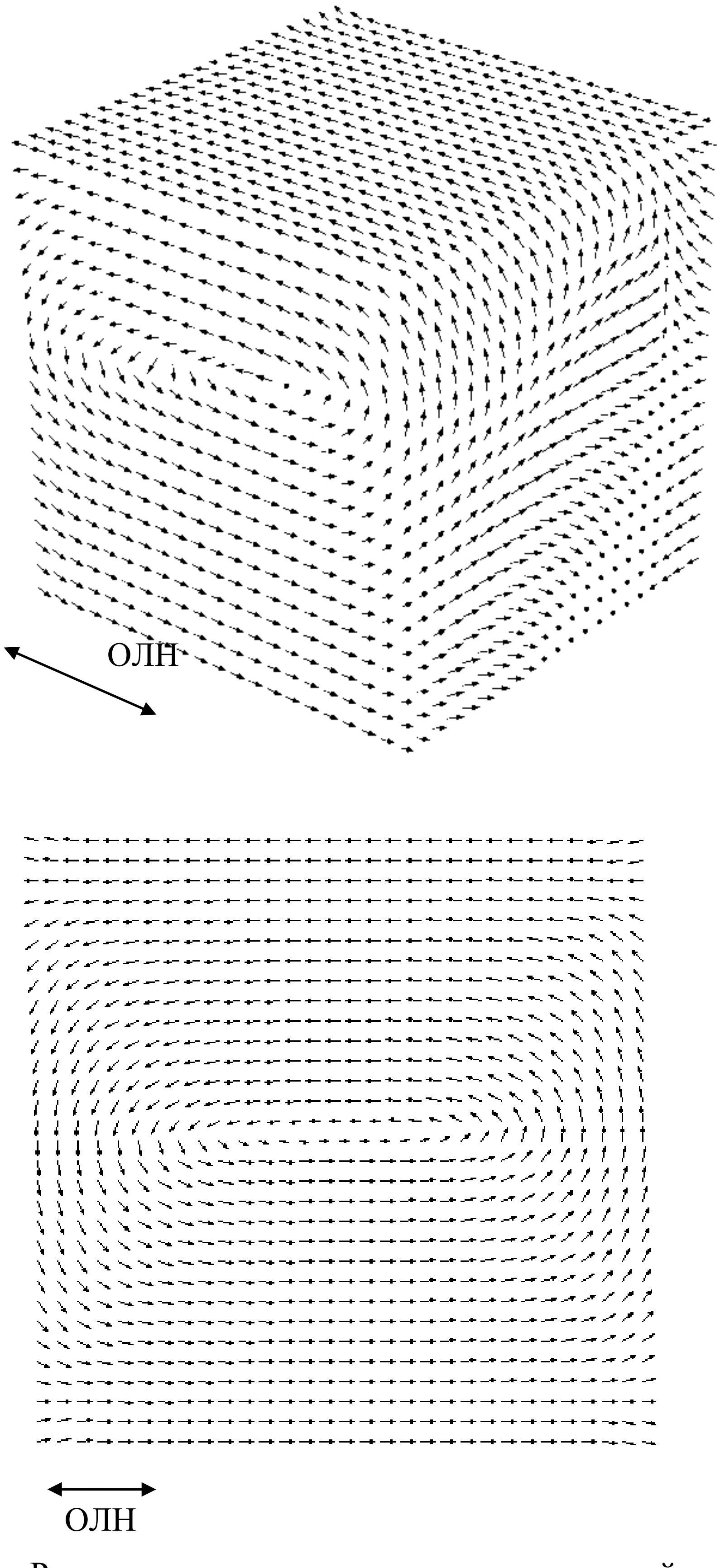


Рисунок 4.3 – Распределение намагниченности в торцевой части (в верху) и в глубине (внизу) монокристалла кобальта после цикла нагрев – охлаждение.

Вычисление потенциала путем итерационного решения уравнения (4.3) позволяет использовать найденный в предыдущий момент времени потенциал в качестве начального приближения, что особенно эффективно при малых изменениях поля **m** за временной шаг. Расширение расчетной области до $\mathbf{D}^*$ увеличивает количество сеточных узлов, но в пустом пространстве потенциал изменяется медленно, и его можно на верхней и боковых гранях $\mathbf{D}^*$ находить по формуле (4.4) на разреженной сетке (с шагом $2h$), а затем в промежуточных узлах вычислять линейной интерполяцией.

Предлагаемый метод можно использовать также и при расчетах стержней конечной длины. При этом вклад в потенциал отрезка стержня $z_d \le z \le z_u$, где распределение намагниченности зависит только от координат x и у, необходимо вычислять по формуле (4.6). В случае пластинок (т.е. коротких стержней) участок с двумерным распределением **m** отсутствует, поэтому рассматривается только конечная область **D** с трехмерным распределение. В этом слувае нижняя грань с прилегающими к ней двугранными и трехгранными углами не отличается от остальных граней призмы.

В качестве примера этот расчетный метод использовался для расчета распределения намагниченности монокристалла кобальта размером $L = 1.9 \times 10^{-5}\,см$ (с магнитными параметрами: $A = 1.3 \times 10^{-6}\,Эрг/см$, $M_s = 1420\,Гс$, $K_1 = 4.0 \times 10^6\,Эрг/см^3$, $K_2 = 1.2 \times 10^6\,Эрг/см^3$). Ось легкого намагничивания ориентировалась по координатной оси x. При выполнении расчетов проводилось проецирование решений с одной сетки на другую, наиболее мелкая из которых содержала $61 \times 61 \times 181$ точек. Проекция рассчитанных векторных полей на более крупную сетку показана на рисунках 4.2 и 4.3. Вверху представлена верхняя треть области **D**, а внизу - проекция поля **m** нижней грани **D** на поперечное сечение монокристалла.

На рисунке 4.2 показан результат расчетов полученный из исходно однородно намагниченного вдоль оси x состояния. Распределение намагниченности в глубине монокристалла (на нижней грани **D**) совпадает с распределением, полученным для бесконечно длинного монокристалла методом минимизации свободной энергии в разделе 2.1. Из-за влияния поверхностных источников магнитостатического поля на верхней грани области **D** (торцевой поверхности) наблюдается незначительное изменение поля намагниченности.

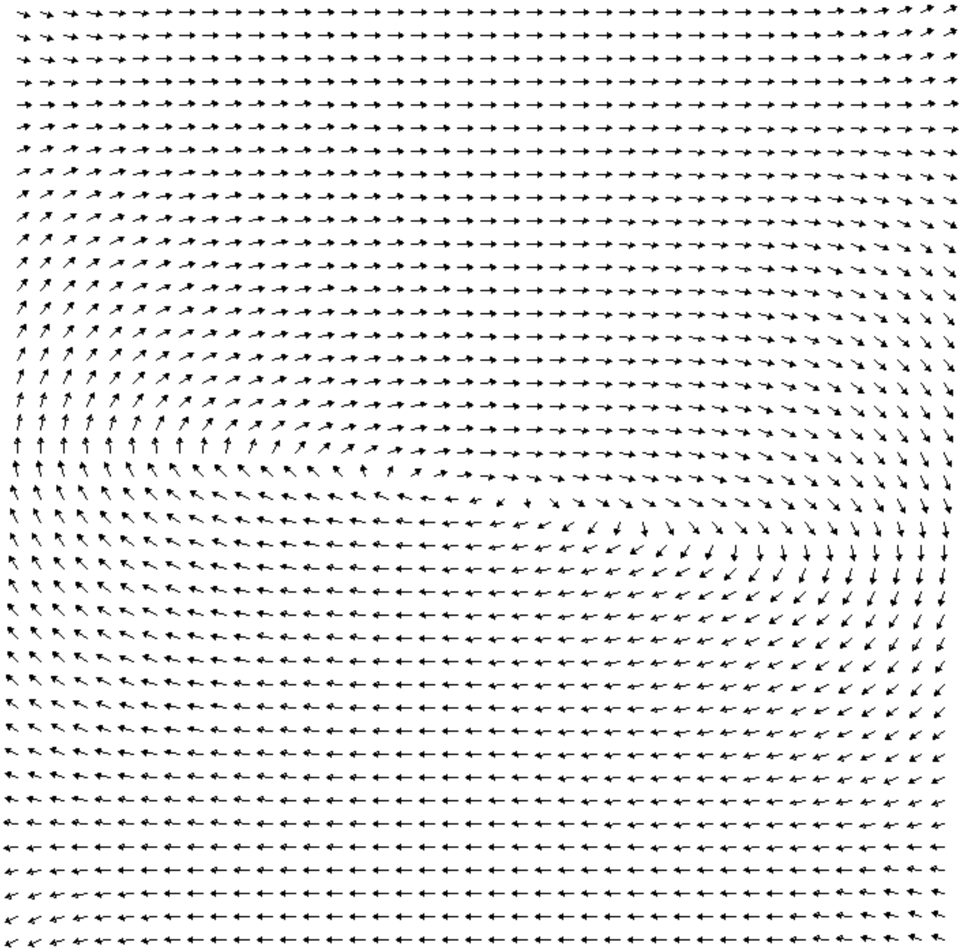


Рисунок 4.4 – Распределение намагниченности торцевой поверхности монокристалла кобальта. Исходное состояние по всей длине стержня выбрано в виде, показанном на рисунке 4.3 внизу (с изменением направления вращения).

При уменьшении (в состоянии, представленном на рисунке 4.2) констант магнитной анизотропии K_1 и K_2 в 10 раз, с последующим их возвращением к исходным значения распределение намагниченности на поверхности становится качественно отличным от распределения в глубине (рисунок 4.3). Такое изменение констант магнитной анизотропии можно рассматривать как цикл нагрева и последующего охлаждения образца (поскольку константы анизотропии с повышением температуры уменьшаются). Следует отметить, что состояние, показанное на рисунке 4.2 является стабильным, а состояние на рисунке 4.3 – метастабильным. По виду торцевой поверхности можно сделать вывод, что образец находится в однодоменном состоянии, хотя в глубине монокристалла распределение намагниченности неоднородно.

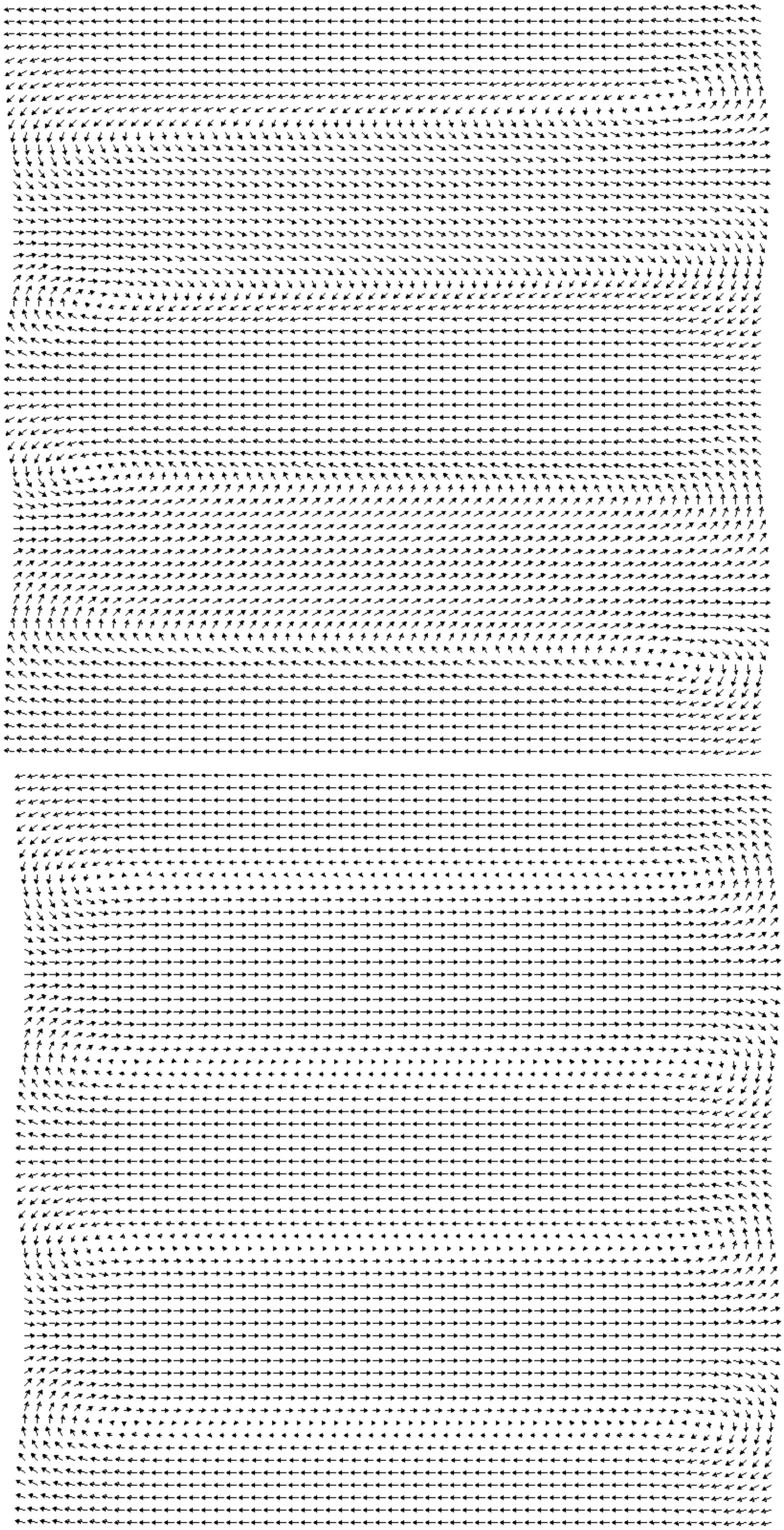


Рисунок 4.5 – Распределение намагниченности в монокристалле кобальта, полученном на торцевой части из исходного состояния по всей длине стержня в виде, представленном внизу.

Однако вывод о том, что в стабильном состоянии поле намагниченности на поверхности образца соответствует полю в глубине, а в метастабильном – не соответствует, не является общим, поскольку получен на частном примере.

Распределение намагниченности на торцевой поверхности, полученное из начального состояния по всей длине стержня в виде, показанном на рисунке 4.3 (внизу) с изменением направления вращения, показано на рисунке 4.4. В этом случае (для метастабильной структуры) поле **m** на поверхности соответствует полю в глубине, хотя заметнее отличается от него по сравнению с трехполосной доменной структурой на рисунке 4.2. Аналогичное замечание можно сделать и для пятиполосной (метастабильной) структуры (рисунок 4.5).

4.2 Роль магнитной анизотропии в формировании симметричных и асимметричных доменных структур в полубесконечном монокристалле

В работе [71] моделировалось распределение намагниченности в пластинке одноосного низкоанизотропного магнетика $Ni_{80}Fe_{20}$ размером 1000 nm$\times$500 nm$\times$250 nm. Было установлено, что на поверхности образца симметричная внутри четырехдоменная структура Ландау искажается (рисунок 4.6). Причем исходно заданная в качестве начального приближения сквозная симметричная структура и трансформируется в асимметричную, т.е. оказывается неустойчивой. Неустойчивость симметричной структуры в пластинке $Ni_{80}Fe_{20}$ авторы работы [71] объясняют большой ее толщиной и низкой анизотропией. Наши расчеты для более тонкой пластинки размером 2000 nm$\times$1000 nm$\times$20 nm показали, что в этом случае возможны метастабильные состояния как асимметричной, так и симметричной структур Ландау. Это позволяет предполагать, что с увеличением толщины образца симметричная структура распределения намагниченности становится неустойчивой.

Вопрос об устойчивости симметричных структур Ландау на поверхности стержнеобразных частиц можно представлять как частный случай пластинок большой толщины (много больше поперечных размеров), рассмотренный нами в предыдущем разделе. А что касается влияния магнитной анизотропии на формирование симметричных или ассиметричных доменных структур, то этот вопрос рассмотрен нами в работе [73].

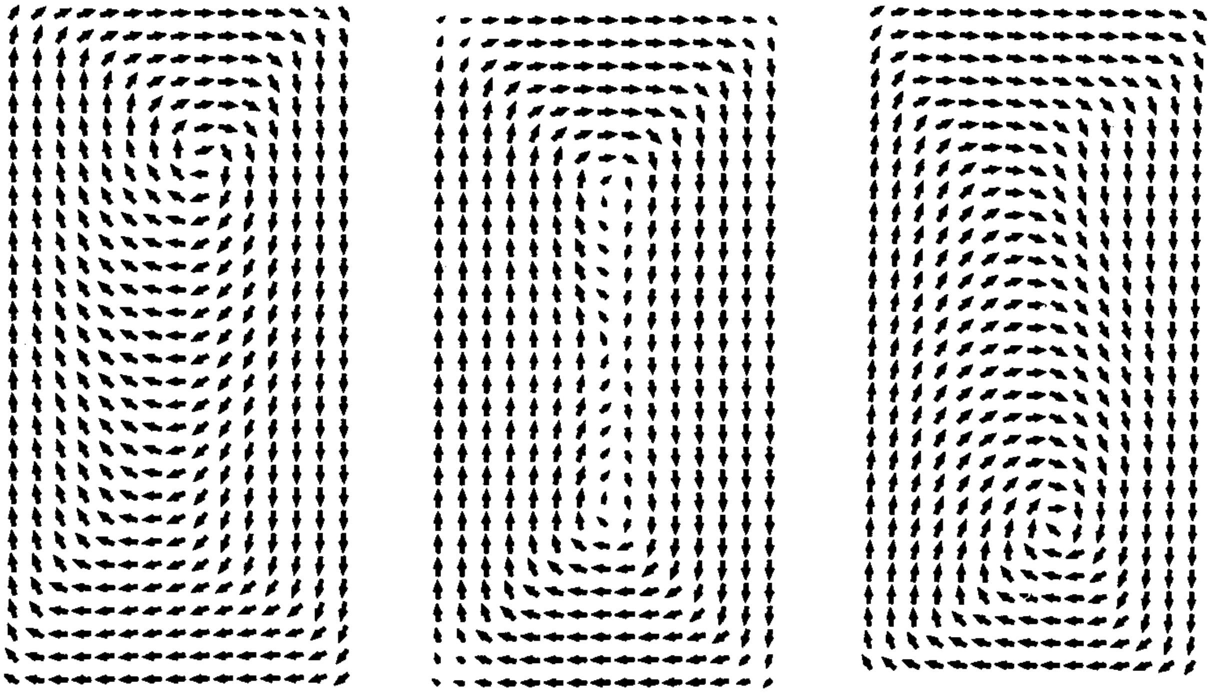


Рисунок 4.6 – Распределение намагниченности в пластинке $Ni_{80}Fe_{20}$, представленное в работе [71]. Слева направо: передняя поверхность, среднее сечение, задняя поверхность. Ось легкого намагничивания ориентирована вертикально.

Исследовался полубесконечный стержень кобальта, который уже рассматривался в разделе 4.1 в примере применения расчетного метода. Магнитная анизотропия образца варьировалась путем умножения констант магнитной анизотропии K_1 и K_2 на коэффициент $K_T \le 1$ при сохранении неизменными других магнитных параметров. Решения контролировались введением случайных возмущений в установившееся векторное поле системы (наибольший угол отклонения составлял 0.25 рад). Затем прослеживалось возвращение возмущенного состояния в исходное. Использовалось проецирование векторных полей с одной расчетной сетки на другую и изменение высоты призмы **D.** Максимальное значение высоты достигало $10L$. На рисунок 4.7 показана верхняя часть области **D** в виде проекций рассчитанных полей **m** на крупную сетку.

$K_T = 1$ $\quad$ $K_T = 0.1$ $\quad$ $K_T = 10^{-3}$

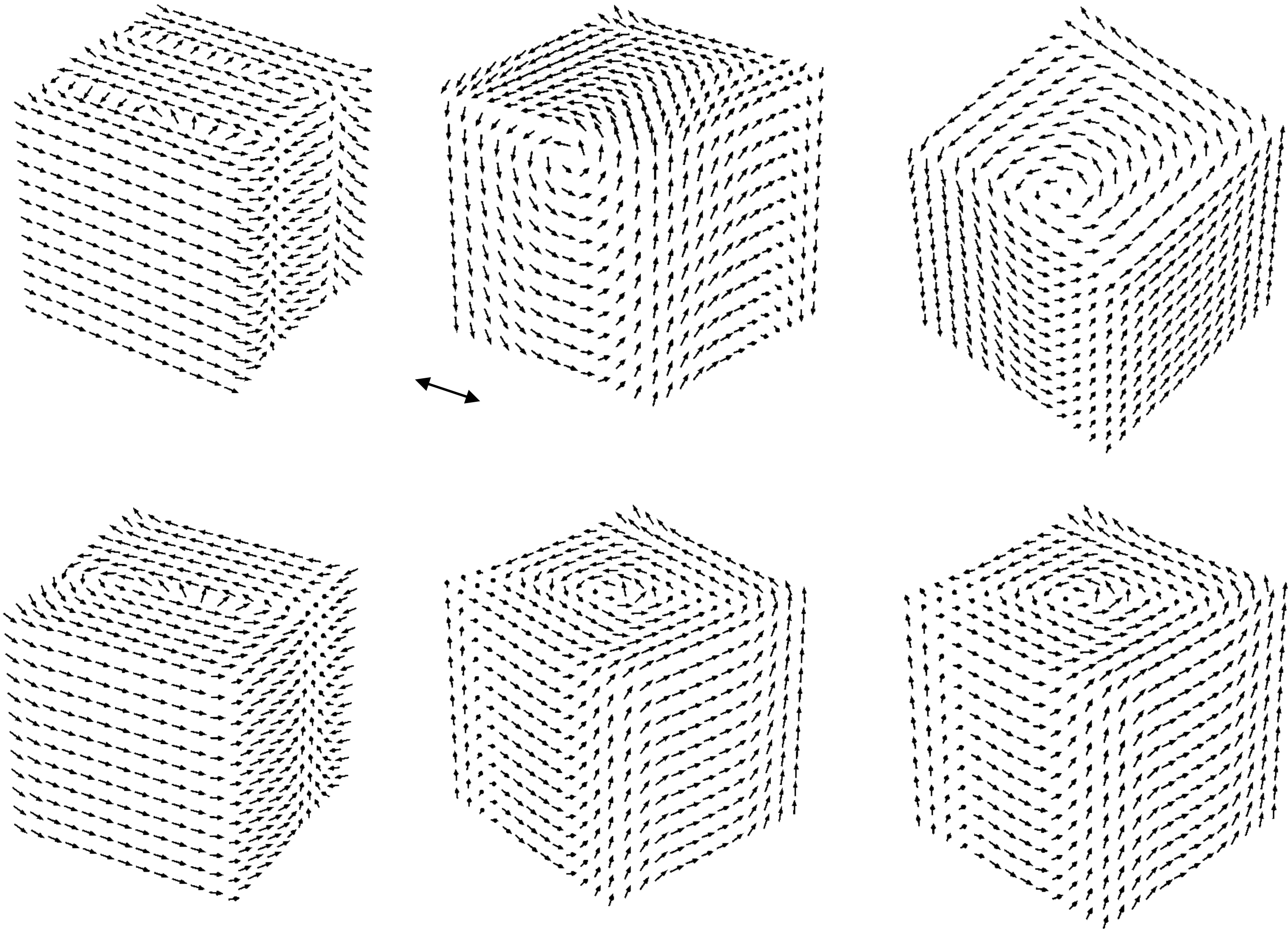


Рисунок 4.7 – Изменение распределения намагниченности в верхней части полубесконечного стержня: верхний ряд - при уменьшении K_T; нижний ряд – при увеличении K_T. Символом «↔ » обозначено направление оси легкого намагничивания.

В верхнем ряду слева на рисунке 4.7 показано распределение намагниченности, полученное из исходно однородно намагниченного вдоль ОЛН при $K_T = 1$ (рисунок 4.2). Малые возмущения начального условия приводят как к симметричному решению, так и к небольшой асимметрии из-за различной ориентации поля **m** в доменных границах, параллельных ОЛН. Причем возможны равновесные состояния, когда две половины одной границы противоположно ориентированы. Такой случай показан на рисунке 4.7, когда в левой половине передней границы намагниченность ориентирована вниз, а в правой – вверх. В глубине монокристалла (на нижней грани **D**) распределение намагниченности соответствует наблюдаемой на поверхности и совпадает с рассчитанной в разделе

2.1 для бесконечно длинного монокристалла. При уменьшении K_T до 0.1 вид доменной структуры качественно изменяет: на передней грани появляется вихревая область, а на верхней грани вместо структуры Ландау образуется некая асимметричная структура, отличная от распределения намагниченности в глубине. При дальнейшем уменьшении K_T до 10^{-3} происходит перемещение вихревой области на верхнюю грань, где она располагается асимметрично, подобно наблюдаемому на поверхности пластинки (рисунок 4.6). В глубине монокристалла устанавливается практически однородное распределение намагниченности вдоль стержня, обусловленное анизотропией формы образца и его низкой магнитной анизотропией. При дальнейшем уменьшении K_T заметного изменения ориентации векторов намагниченности не происходит. При увеличении коэффициента K_T до 1 асимметричное положение вихревой области на верхней грани сохраняется и сопровождается ее вытягиванием вдоль ОЛН.

Если же при $K_T = 10^{-3}$ выбрать в качестве начального состояния однородную намагниченность вдоль стержня, то получается ожидаемое из общих физических соображений распределение намагниченности, показанное на рисунке 4.7 в нижнем ряду справа, когда внутри стержня поле **m** почти не изменяется, а на верхней грани устанавливается симметричный вихрь, понижающий магнитостатическую энергию системы. При увеличении K_T до 1 вихревая область на верхней грани вытягивается вдоль ОЛН и слегка поворачивается к диагонали квадрата (рисунок 4.4), внутри же образца образуется симметричное распределение намагниченности, соответствующее распределению на поверхности (рисунок 4.3)

Таким образом можно сделать вывод о том, что в широком диапазоне изменения магнитной анизотропии, на торцевой поверхности полубесконечного стержня квадратного поперечного сечения возможно устойчивое существование как симметричного (или близкого к симметричному), так и асимметричного распределения намагниченности (симметричных и асимметричных доменных структур).

Глава 5 Микромагнитное моделирование распределения намагниченности в тонких пластинках

5.1 Метод расчета

Постановка задачи о расчетах распределения намагниченности в тонких пластинках (пленках, слоях), как правило предполагает определенные ограничения на вид поля $\mathbf{m}$. Например, в работах [106-108,119-124] рассматривают зависимость поля намагниченности от одной координаты (одномерная постановка задачи), ортогональной плоскости слоев. Авторы работ [28, 30, 132-153] предполагают, что распределение намагниченности одинаково в сечениях, перпендикулярных оси, ориентированной в плоскости пленки (двумерная постановка задачи). В работах [28-30, 151-155] предполагается периодичность структур, возникающих в пленках. В ряде работ полагалось, что намагниченность постоянна в направлении, ортогональном плоскости, а поле $\mathbf{m}$ изменялось только в плоскости слоя (двумерная постановка задачи) [32, 156-164]. В ряде работ расчеты проводились в предположении, что поле $\mathbf{m}$ является плоским (компланарным) [161-164].

В настоящей работе предполагается, что поле $\mathbf{m} = (m^x, m^y, m^z)$ является одинаковым в любом сечении, параллельном плоскости пластинки, но не является плоским (двумерная постановка задачи) [165-167]. Поскольку поле намагниченности предполагается в качестве расчетной области, рассматривается среднее сечение **D**, в центре которого расположено начало координатной системы (рисунок 5.1). Качество расчетного метода определяет эффективность вычисления магнитостатического поля, трехмерного в данном случае. Методы вычисления магнитостатического поля, рассмотренные в первой главе, предполагали вычисление компонент вектора $\mathbf{h}_d$ [9,53] или потенциала U. В первом случае проводится вычисление трех компонент $\mathbf{h}_d$ в каждом сеточном узле как трех сумм - вклада отдельных ячеек.

Потенциал U и его градиент ∇U являются функциями трех координат, поэтому для вычисления ∇U в области **D** требуется вычисление U на трехмерной сетке.

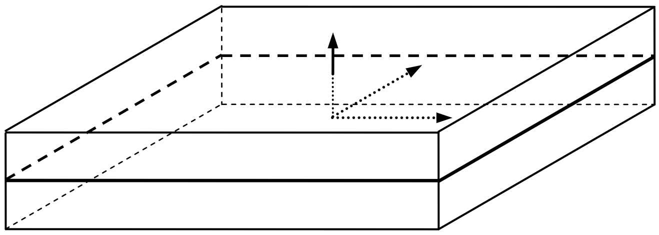


Рисунок 5.1 – Расположение расчетной области **D** и координатной системы.

Предлагаемый ниже метод вычисления магнитостатического поля позволяет ограничиться двумя суммами и двумерной сеткой.

Нахождение стационарных решений уравнения Ландау-Лифшица (4.1) при расчете поля намагниченности в области **D**, проводилось в предположении, что в выражении для эффективного поля $\Delta\mathbf{m} = \dfrac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial y^2}$, а $\nabla U = (\partial U/\partial x,\ \partial U/\partial y,\ \partial U/\partial z)$.

Потенциал магнитостатического поля U вычислялся по формуле (1.18):

$$U(\mathbf{r}_0) = \iiint\limits_V \mathbf{m} \cdot \nabla \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\right|^{-1} dV\,, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ - радиус-вектор точки вычисления потенциала, а $\mathbf{r} = (x, y, z)$ - переменная интегрирования, которая изменяется по объему пластинки V.

Граничное условие на боковых гранях пластинки для уравнения (4.1) задается $\partial\mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$, что означает отсутствие поверхностной энергии. Выполнение этого условия на верхней и нижней гранях следует из постановки задачи.

Среднее сечение пластинки **D,** при численном решении задачи, покрывалось равномерной сеткой с шагом h, на которой индексы сеточных узлов i и j возрастают в направлениях координат x и y соответственно (рисунок 5.2). Уравнения Ландау-Лифшица решались с использованием явной конечно-разностной схемы (1.16). Условие $\partial\mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$ на границе **D** аппроксимировалось с порядком $O(h^2)$. Трехмерный вектор ∇U аппроксимировался на двумерной сетке следующим образом. Сеточный аналог потенциала $U_{i,j}$ во внутренних и регулярных граничных (не угловых) узлах сетки (x_i, y_j) вычислялся методом, описанным ниже. Затем по обычным конечно-разностным формулам во внутренних узлах находились первые две компоненты сеточного аналога вектора ∇U: $\nabla_x U_{i,j} = (U_{i+1,j} - U_{i-1,j})/(2h)$, $\nabla_y U_{i,j} = (U_{i,j+1} - U_{i,j-1})/(2h)$. Вычисление третьей компоненты $\nabla_z U_{i,j}$ и сеточной функция $U_{i,j}$ описано ниже.

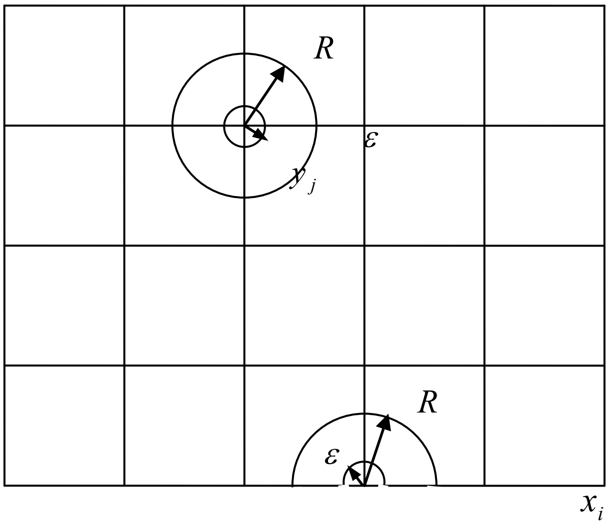


Рисунок 5.2 – Расположение узловых точек на расчетной сетке: *A* – внутренняя, *B* – регулярная граничная, *C* – угловая.

При $\partial \mathbf{m}/\partial z = \mathbf{0}$ согласно формуле (5.1):

$$U(\mathbf{r}_0) = \iiint_V \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\right) dV = \iint_{\mathbf{D}} dxdy \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \nabla\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\right) dz =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} dxdy \int_{-\delta}^{\delta} \left[m^x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\right) + m^y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\right) + m^z \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\right) \right] dz =$$

$$= \iint_{\mathbf{D}} dxdy \left[\frac{1}{a^2}\left(m^x (x - x_0) + m^y (y - y_0)\right) \cdot \left(\frac{z_0 - \delta}{\sqrt{a^2 + (z_0 - \delta)^2}} - \frac{z_0 + \delta}{\sqrt{a^2 + (z_0 + \delta)^2}} \right) + \right.$$

$$\left. + m^z \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + (\delta - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\delta + z_0)^2}} \right) \right], \qquad (5.2)$$

где $a=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, δ - половина толщины пластинки.

Выражение для производной получаем из формулы (5.2):

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0}=\iint\limits_{\mathbf{D}}\left[\left(m^x(x-x_0)+m^y(y-y_0)\right)\cdot\left(\frac{1}{\left(a^2+(z_0-\delta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{\left(a^2+(z_0+\delta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)+\right.$$

$$\left.+m^z\left(\frac{z_0+\delta}{\left(a^2+(z_0+\delta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{z_0-\delta}{\left(a^2+(z_0-\delta)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right]dxdy\,. \qquad (5.3)$$

Соответственно для сечения **D (**при $z_0=0$) из (5.2) и (5.3) получаем:

$$U(\mathbf{r}_0)=\iint\limits_{\mathbf{D}}\left[-\frac{2\delta}{a^2\sqrt{a^2+\delta^2}}\left(m^x(x-x_0)+m^y(y-y_0)\right)\right]dxdy\,, \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial U(\mathbf{r}_0)}{\partial z_0}=\iint\limits_{\mathbf{D}}\frac{2m^z\delta}{\left(a^2+\delta^2\right)^{\frac{3}{2}}}dxdy\,. \qquad (5.5)$$

Интегралы (5.4) и (5.5) при построении сеточных аналогов $U_{i,j}$ и $\nabla_z U_{i,j}$ заменялись для функций $U(\mathbf{r}_0)$ и $\partial U(\mathbf{r}_0)/\partial z_0$ суммами вида

$$S^h_{i_0,j_0}=h^2\sum_{(i,j)\neq(i_0,j_0)}\sigma_{i,j}F_{i,j}+I_{i_0,j_0}\,. \qquad (5.6)$$

Здесь (i_0,j_0) - индексы сеточного узла, соответствующего точке $\mathbf{r}_0$; (i,j) - индексы сеточных узлов, принадлежащие области **D**; $\sigma_{i,j}$ - доля ячейки с центром в точке (x_i,y_j), принадлежащая области **D**.

Для внутренних точек (*A*), регулярных граничных (*B*) и угловых (*C*), показанных на рисунке 5.2, $\sigma_{i,j}$ составляет 1, 0.5 и 0.25 соответственно. $F_{i,j}$ - значение подынтегральной функции в точке (x_i,y_j).

Если сумма (5.6) является приближением для интеграла (5.4), то слагаемое I_{i_0,j_0} появляется из-за особенности подынтегральной функции в точке $(x=x_0, y=y_0)$, где $a=0$. Полагая ячейку с центром в точке (x_{i_0},y_{j_0}) кругом площадью h^2, а вектор **m** постоянным в этом круге и равным $\mathbf{m}_{i_0,j_0}$, слагаемое I_{i_0,j_0} можно вычислить с помощью интеграла по части кольца **G** с внутренним радиусом ε и внешним радиусом $R = h/\sqrt{\pi}$. Используя полярные координаты с центром в точке (x_{i_0}, y_{j_0}), получаем:

$$I_{i_0,j_0} = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint\limits_{\mathbf{G}} \left[-\frac{2\delta}{a^2\sqrt{a^2+\delta^2}} \left(m^x_{i_0,j_0}(x - x_0) + m^y_{i_0,j_0}(y - y_0) \right) \right] dxdy =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(-2\delta \int\limits_{\varepsilon}^{R} (\delta^2 + \rho^2)^{-0.5} d\rho \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} (m^x_{i_0,j_0} \cos(\theta) + m^y_{i_0,j_0} \sin(\theta)) d\theta \right). \qquad (5.7)$$

Выбор части кольца соответствует части круглой ячейки, содержащейся в области **D**. Например, для точки A на рисунке 5.2 круглая ячейка полностью принадлежит **D,** и границы изменения полярного угла составляют $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 2\pi$. Для точки B области **D** принадлежит верхняя половина ячейки и, соответственно, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. При решении уравнения Ландау-Лифшица требуется вычислять компоненты $\nabla_x U_{i,j}$ и $\nabla_y U_{i,j}$ только во внутренних точках области **D**, поэтому при вычислении потенциала в формулах (5.6)-(5.7) достаточно ограничиться узлами (i_0, j_0), лежащими внутри **D** и на регулярных участках границы. Для этих узлов из (5.7) следует, что слагаемое I_{i_0,j_0} определяется формулой:

$$I_{i_0,j_0} = \begin{cases} 0 & \text{для внутренних точек} \\ 4\delta \mathbf{m}_{i_0,j_0} \cdot \mathbf{n} \ln\left[(R + (R^2 + \delta^2)^{0.5})/\delta \right] & \text{для регулярных граничных точек} \end{cases}. \qquad (5.8)$$

Если сумма (5.6) составляется для вычисления интеграла (5.5), то формально подынтегральная функция особенности не имеет, но при распространении суммы на все сеточные узлы слагаемое с $(i, j) = (i_0, j_0)$ получается для внутренних узлов (i_0, j_0) равным $2h^2 m^z_{i_0,j_0}/\delta^2$ и при $m^z_{i_0,j_0} \neq 0$ неограниченно возрастает при $\delta \to 0$, хотя по физическому смыслу должно стремиться к $4\pi m^z_{i_0,j_0}$ - напряженности поля между параллельными противоположно заряженными плоскостями с плотностями зарядов $\pm m^z_{i_0,j_0}$. Ошибочный результат получается из-за $a = 0$ при $(i, j) = (i_0, j_0)$. Согласно теореме о среднем величина a здесь должна равняться некоторому среднему расстоянию между точками ячейки и ее центром. Поэтому слагаемое с $(i, j) = (i_0, j_0)$ следует выделять из общей суммы и вычислять по особой формуле.

Полагая ячейку, прилегающую к точке (x_{i_0}, y_{j_0}) круглой, а компоненту m^z в пределах ячейки постоянной и равной $m^z_{i_0,j_0}$, в полярных координатах получаем:

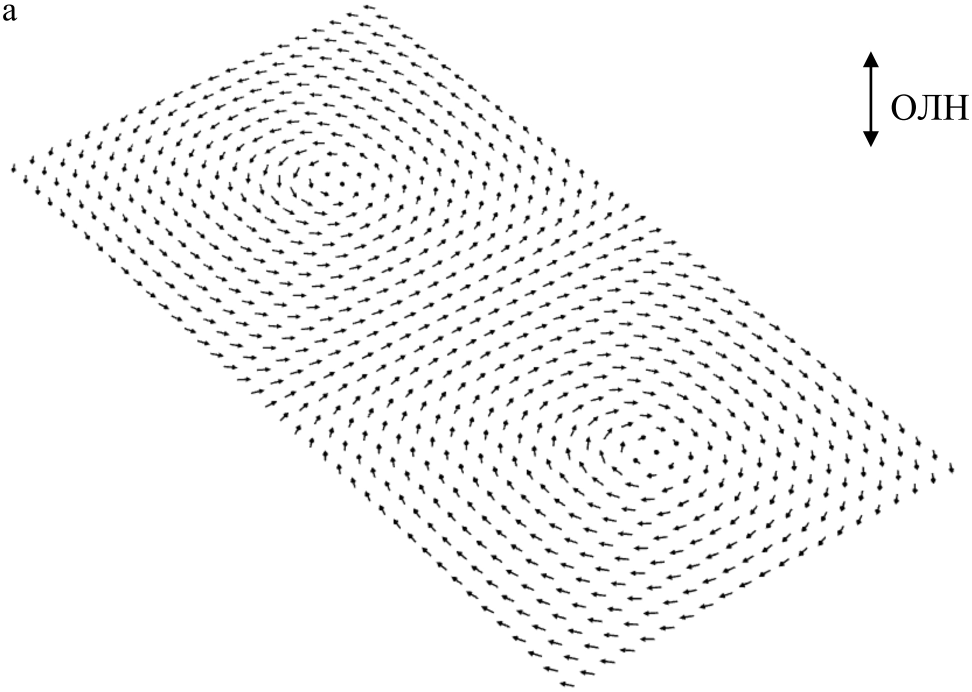
$$I_{i_0,j_0} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 2\delta m^z_{i_0,j_0} (\rho^2 + \delta^2)^{-1.5} \rho d\rho = 4\pi m^z_{i_0,j_0} (1 - \delta / (R^2 + \delta^2)^{0.5}) . \quad (5.9)$$

Здесь полярный угол всегда изменяется от 0 до 2π, поскольку сеточная функция $\nabla_z U_{i,j}$, в отличие от $U_{i,j}$, вычисляется только во внутренних узлах области **D**. Предельный переход в формуле (5.9) при $\delta \to 0$ дает $4\pi m^z_{i_0,j_0}$ - правильный результат. Таким образом, сеточные функции $U_{i,j}$ и $\nabla_z U_{i,j}$ находятся как суммы (5.6), в которых дополнительное слагаемое I_{i_0,j_0} вычисляется по формулам (5.8) и (5.9) соответственно.

Метод изложенный выше основан на предположении, что в достаточно тонкой пластинке выполняется условие $\partial \mathbf{m} / \partial z = \mathbf{0}$. Следует отметить, что данное предположение применимо и для пластинки бесконечной толщины, т.е. бесконечно длинного стержня. Расчет для пластинки и стержня кобальта размерам $190 \times 190 \times 10^7$ нм, показал полное совпадение с результатами главы **2**, где рассматривался бесконечно длинный стержень такого же сечения. Но эффективность метода, изложенного в главе **2**, для длинного стержня оказалась существенно выше эффективности метода, описанного в настоящей главе, из-за использования в главе **2** для расчета магнитостатического поля уравнения Пуассона.

Хотя уравнение Пуассона и дает ряд преимуществ по сравнению с интегральными формулами, о которых говорилось в главе **1**, но в данном случае его использование нецелесообразно. Это связано с тем, что производную $\partial U(\mathbf{r}_0) / \partial z_0$ по-прежнему нужно вычислять по интегральной формуле (5.5), а вместо вычисление интеграла (5.4), потребуется вычислять аналогичный интеграл для $\partial U^2(\mathbf{r}_0) / \partial z_0^2$, который войдет в правую часть уравнения Пуассона. Таким образом задача опять сводится к вычислению двух интегралов и дополнительно к ним потребуется решение уравнения Пуассона.

а



б

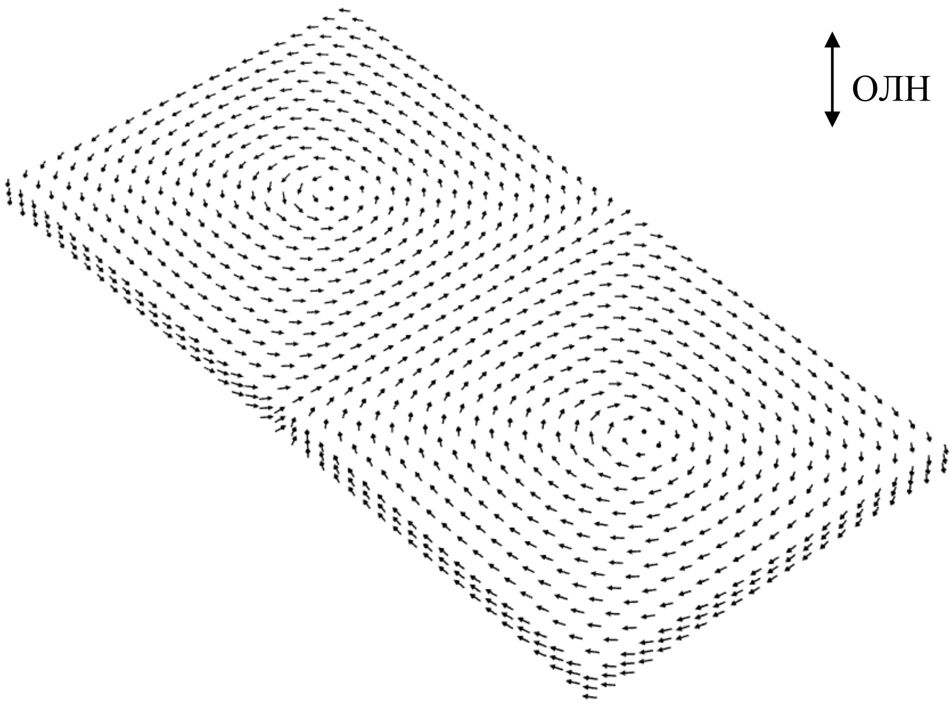


Рисунок 5.3 – Распределение намагниченности в пластинке $Ni_{80}Fe_{20}$ рассчитанное: а – по двумерной модели; б – по трехмерной модели (толщина пластинки показана увеличенной). Показана проекция векторных полей на крупную сетку.

Изложенный выше метода расчета полей намагниченности в тонких пластинках проверялся сравнением результатов расчета приведенными в главе 2 для пластинки размером $200 \times 100 \times 5$ нм с магнитными параметрами $Ni_{80}Fe_{20}$.

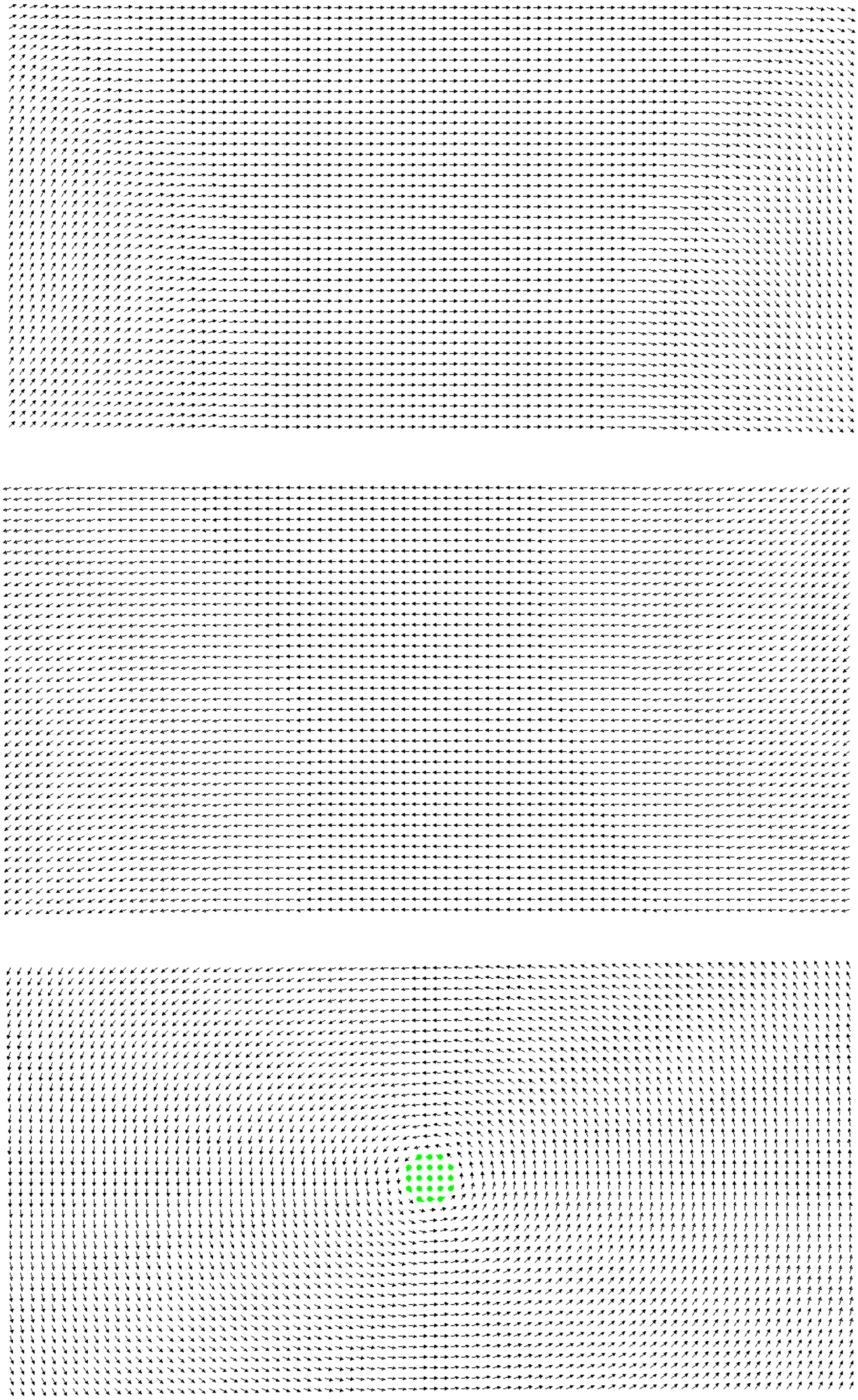
Предполагалось, что ось легкого намагничивания ориентирована по координатной оси z. Задача решалась в полной трехмерной постановке методом, описанным в главе 4 применительно к конечной области **D** и в двумерной постановке.

Распределение намагниченности, рассчитанное из первоначального однородно намагниченного состояния по оси z описанным выше методом (в двумерной постановке) на сетке 241×121 точек показано рисунке 5.3а. Решение этой же задачи в трехмерной постановке показало хорошее совпадение векторных полей (рисунок 5.3б).

Соответствующая доменная структура, рассчитанная на трехмерной сетке и показанная на рисунке 5.3б, была представлена в работе [168] для пластинки $Ni_{80}Fe_{20}$ размером $2000 \times 1000 \times 20$ нм.

5.2 Влияние анизотропии на доменные структуры в тонких пластинках $Nd_2Fe_{14}B$

Как показывают экспериментальные исследования, в тонких пластинках (пленках) фиксируется достаточно большое многообразие доменных структур, зависящих от различных факторов. Во многих случаях При экспериментальном изучении влияния какого-либо одного фактора на вид доменной структуры сложно обеспечить постоянство остальных факторов. А при численном моделировании эта проблема не возникает. В настоящем разделе рассматривается влияние магнитной анизотропии на вид доменной структуры (поля намагниченности) в тонких пластинках $Nd_2Fe_{14}B$ с ОЛН, нормальной плоскости [169]. Результаты, полученные методом, описанным в разделе 5.1, представлены на рисунках ниже. Магнитные параметры $Nd_2Fe_{14}B$ приведены в главе 2. На рисунках векторы, направленные преимущественно по оси z (вверх), отмечены темными кружками, а ориентированные преимущественно вниз – светлыми. Изменение анизотропии магнетика $Nd_2Fe_{14}B$ при расчетах осуществлялось (как и в главе 3) умножением на коэффициент K_T констант K_1 и K_2.



а)

б)

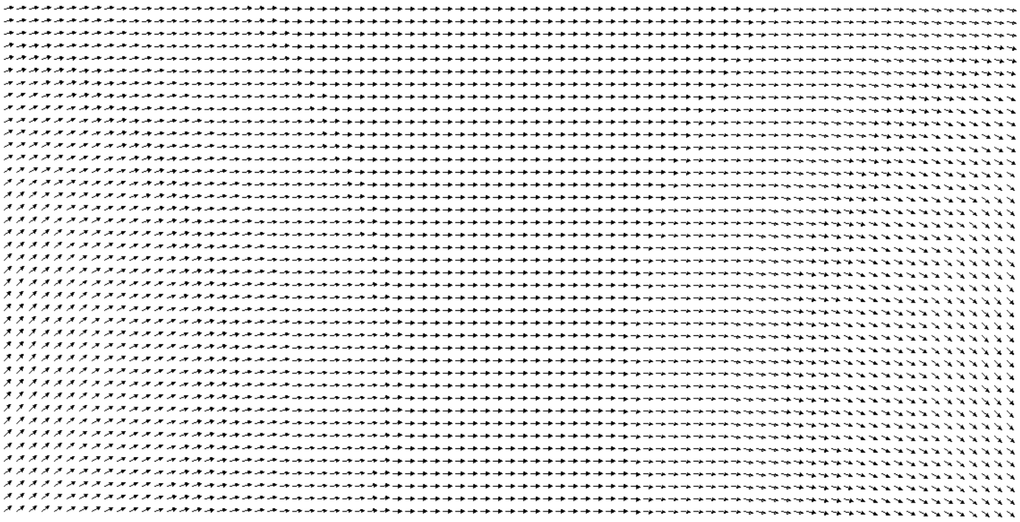
в)

Рисунок 5.4 – Возможные виды распределения намагниченности в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $100\times50\times5$ нм при $K_T=10^{-4}$, полученные из различных начальных состояний.

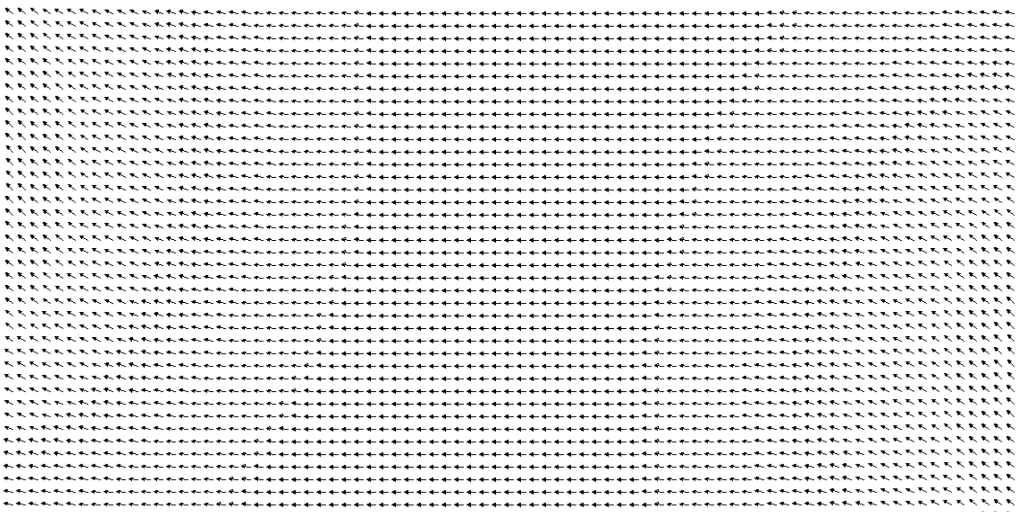
из, в качестве которых выбиралась в низкоанизотропном состоянии ($K_T=10^{-4}$) были получены поля намагниченности, показанные На рисунке 5.4 показаны поля намагниченности в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $100\times50\times5$ нм при

$K_T = 10^{-4}$, полученные из различных начальных состояний (ориентация поля **m** вдоль координатных осей и случайная ориентация векторов **m**, моделирующая размагниченное высокочастотным внешним полем состояние образца.

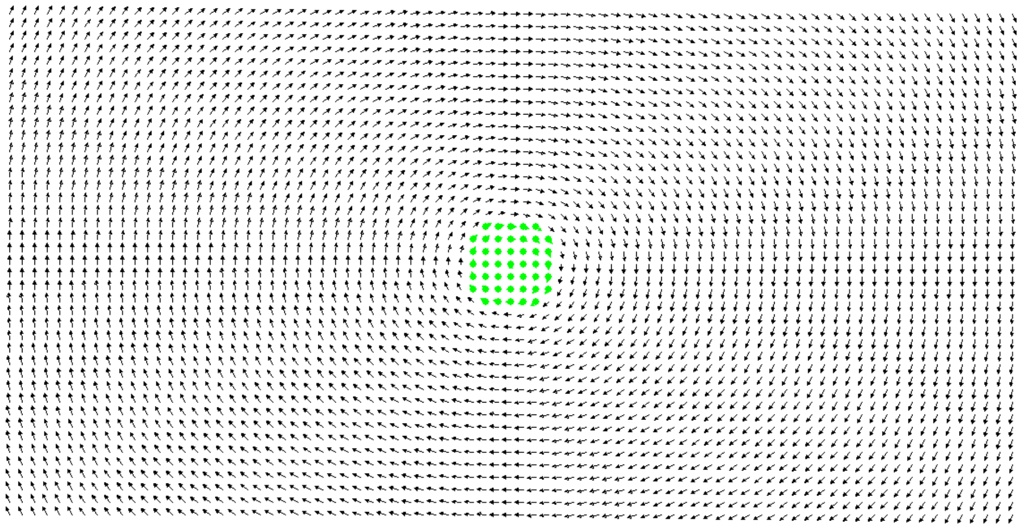
Поля намагниченности, полученные для пластинки при $K_T = 7 \cdot 10^{-2}$ показаны на рисунке 5.5. При этом безразмерные коэффициенты $\frac{A}{M_s^2 L^2}$, $\frac{K_1 \cdot K_T}{M_s^2}$ и l, определяющие вклад в свободную энергию системы (2.1), энергии обменного взаимодействия, энергии анизотропии и энергии системы в собственном поле, составляют $2.61 \cdot 10^{-3}$, 1.94 и 1 соответственно. Для пластинки Co такого же размера эти коэффициенты (при $K_T = 1$) равны $6.45 \cdot 10^{-3}$, 1.98 и 1 соответственно. Таким образом, пластинки Co и $Nd_5Fe_{14}B$ при $K_T = 1$ и $7 \cdot 10^{-4}$ соответственно заметно отличаются только коэффициентами $\frac{A}{M_s^2 L^2}$ (в 2.47 раза).



(a)

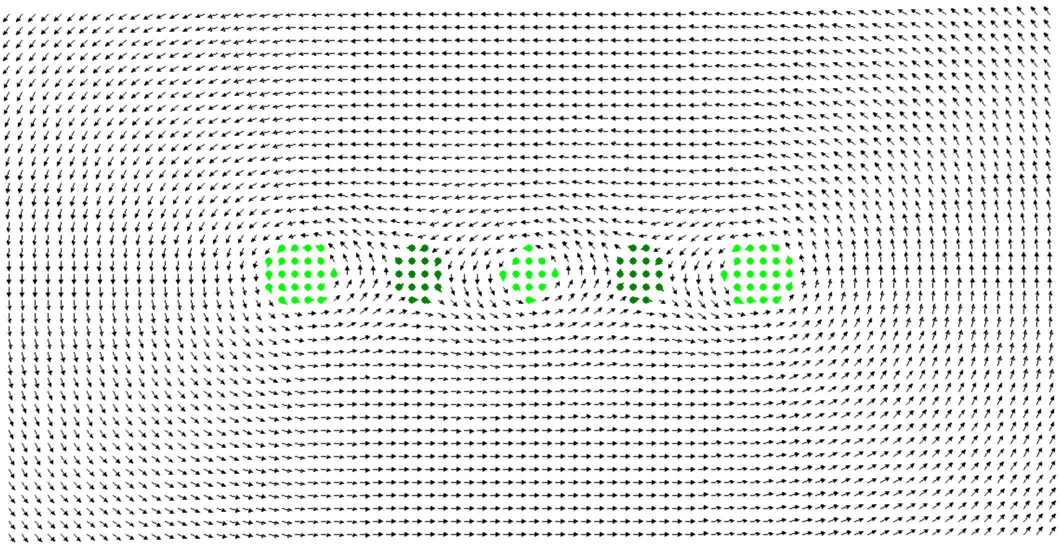


(б)



(*в*)

(*г*)



(*д*)

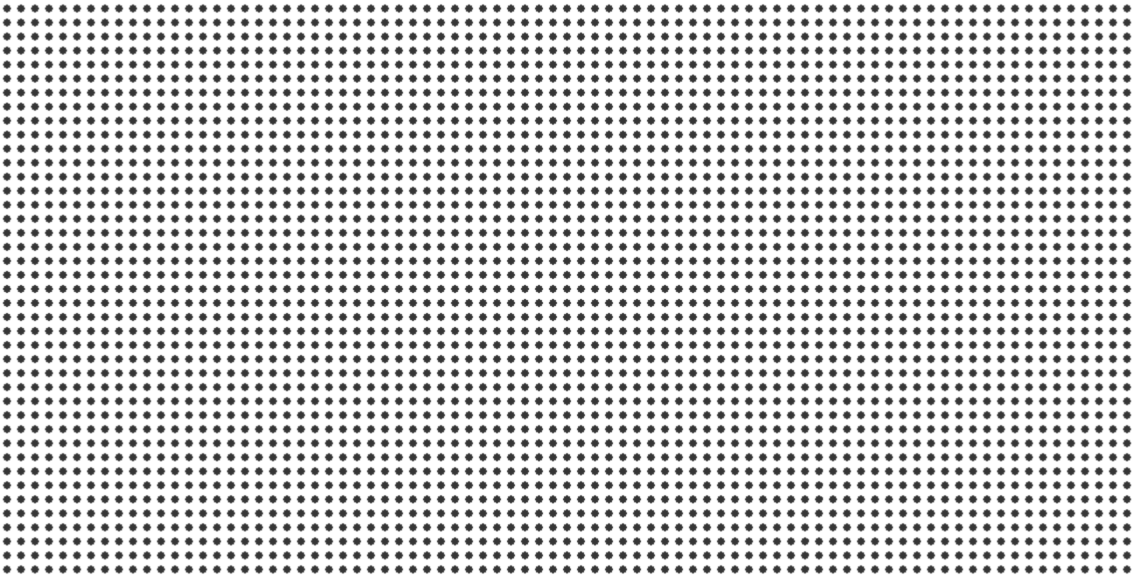
Рисунок 5.5 – Доменные структуры в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $100\times50\times5$ нм при $K_T = 7\cdot10^{-2}$.

Поэтому показанные на рисунке 5.5 поля намагниченности почти не отличаются от результатов, полученных для пластинки Co с размерами, увеличенными в $\sqrt{2.47} = 1.57$ раз, т.е. равными $157 \times 78 \times 7.8$ нм. Небольшое различие вызвано разным отношением констант анизотропии K_2 / K_1, которое для Co составляет 0.3, а для $Nd_5Fe_{14}B$ равно 0.15.

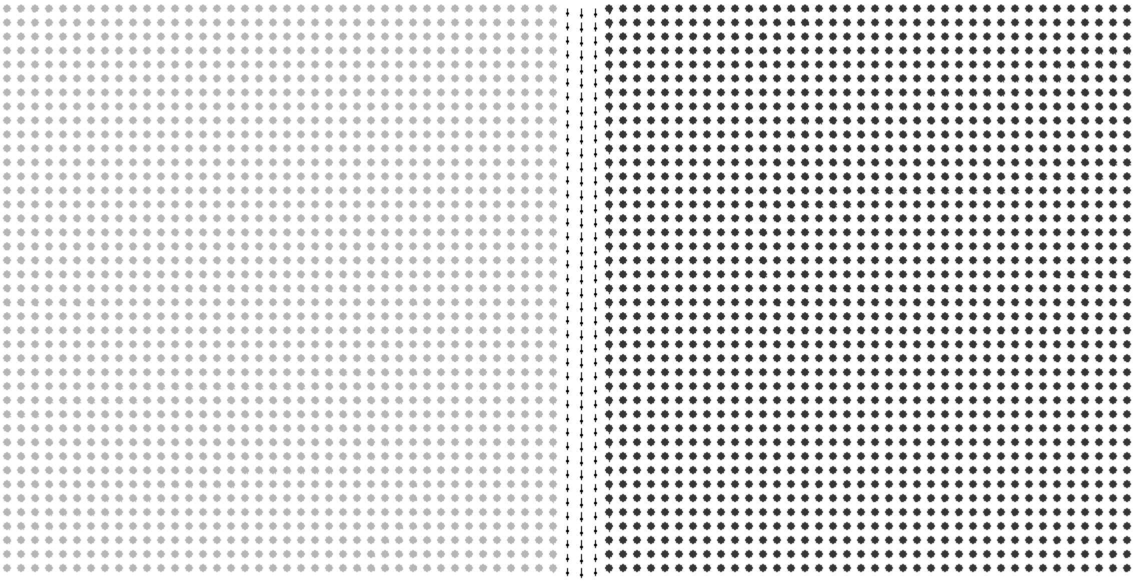
Из рисунков 5.4 и 5.5 видно, что доменные структуры *а* и *б* отличаются незначительно. Различие в вихревых структурах (рисунки 5.4*в* и 5.5*в*) значительнее. Видно, что при повышении анизотропии увеличивается размер вихревой зоны с ориентацией намагниченности вдоль ОЛН. Структуры 5.5*г-д* можно рассматривать как модификации структуры 5.5*в* с увеличенным количеством вихревых зон, что представляет вихревую структуру как доменную структуру Ландау с границей в виде цепочки вихрей.

При $K_T = 1$ в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ из начального состояния со случайной ориентацией векторов **m**, при разных выборках получались: однодоменная, двухдоменная и трехдоменная структуры, показанные на рисунке 5.6. Из-за высокой анизотропии поле намагниченности во всех случаях ориентируется преимущественно по оси легкого намагничивания, в виде полосовых доменов разделенных блоховскими границами. Фрагмент такой границы показан на рисунке 5.6*г*. Максимальное количество доменов, которое может появиться в результате случайной выборки начального состояния, увеличивается при увеличении длины пластинки.

При уменьшении коэффициента K_T до 0.18 в двухдоменном состоянии (см. рисунок 5.6б) доменная граница расширяется, а ее тип изменяется от блоховского к неелевскому (рисунок 5.7). Такая трансформация доменной границы приводит к уменьшению поверхностных источников собственного поля за счет увеличения доли поверхности, в которой поле **m** ориентируется преимущественно вдоль поверхности. И несмотря на появление в неелевской границе объемных источников, энергия системы в собственном поле при этом уменьшается в 1.4 раза. А расширение границы приводит к снижению обменной энергии в 7.2 раза и увеличению энергии магнитной анизотропии в 1.6 раза. Последнее связано с тем, что увеличение ширины границы, способствующее росту энергии анизотропии, преобладает над ее убывания из-за K_T, уменьшающего коэффициенты анизотропии K_1 и K_2.

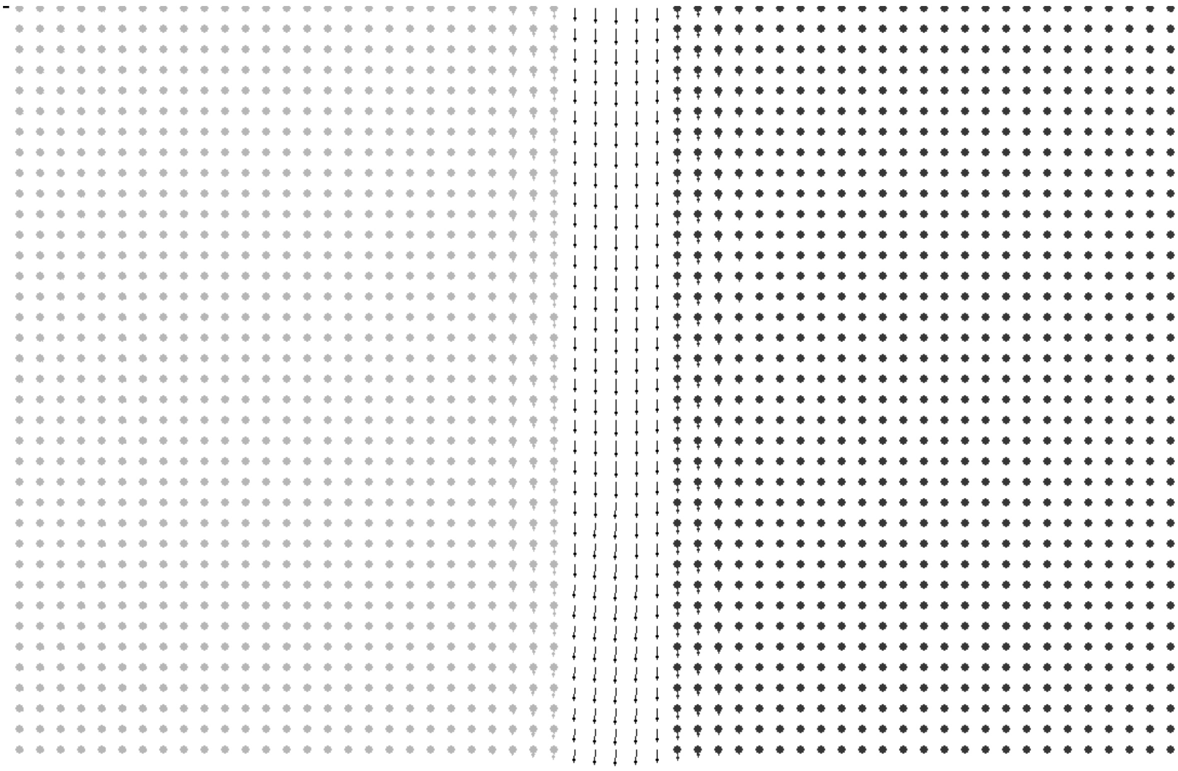


(*a*)

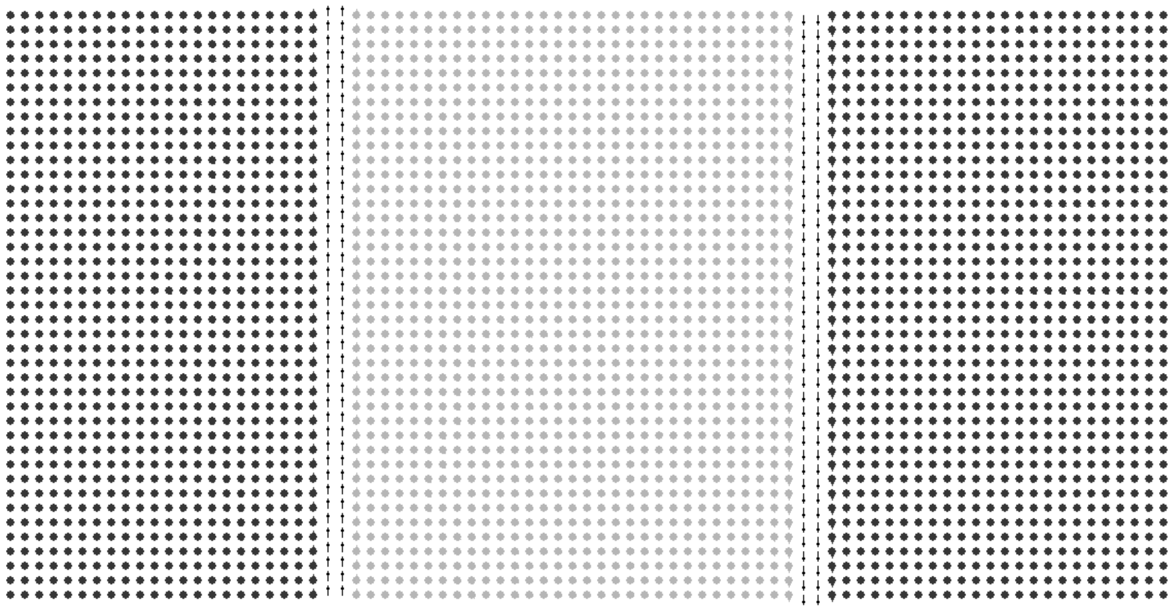


(*б*)

Рисунок 5.6 *а-б*



(*в*)



(*г*)

Рисунок 5.6 – Однодоменная (*а*), двухдоменная (*б*) и трехдоменная (*г*) структуры в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $100\times50\times5$ нм при $K_T=1$; (*в*) – фрагмент доменной границы, показанной на рисунке (*б*)

Заметное искривление неелевской границы (см. рисунок 5.7) вызвано увеличением в центре пластинки (по сравнению краями) области, в которой поле **m** ориентировано преимущественно вдоль поверхности. Это можно объяснить тем, что поворот поля **m** к поверхности на верхней и нижней гранях пластинки уменьшает поверхностные источники собственного поля. А поворот векторов **m** в том же направлении на боковых гранях (ортогональных оси *y*), где поверхностных источников нет, только увеличивает энергию анизотропии.

Дальнейшее уменьшение коэффициента K_T приводит к расширению неелевской границы на всю пластинку. В результате двухдоменная структура переходит в сходную с однодоменными, показанными на рисунке 5.5 *а-б.*

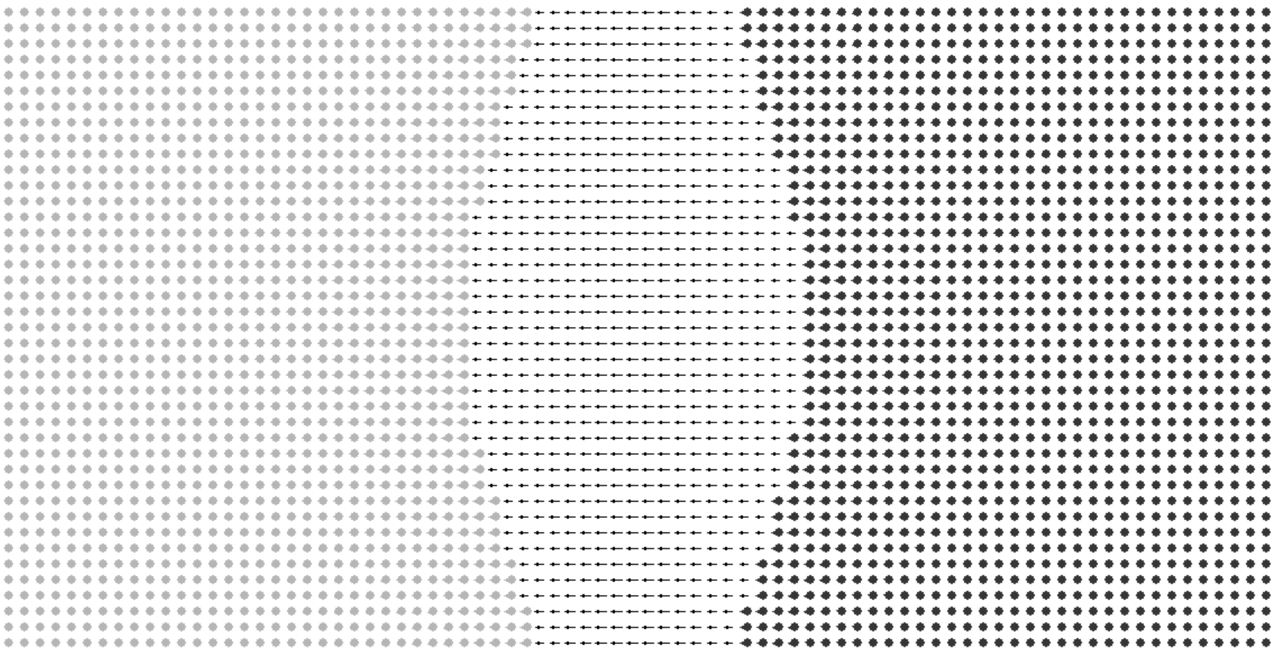


Рисунок 5.7 – Двухдоменная структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $100 \times 50 \times 5$ нм полученная из начального состояния, показанного на 5.6б при уменьшении K_T до 0.18.

Следует отметить, что новые структуры в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ толщиной 5 нм появляются не только при изменении коэффициента K_T, но и при увеличении поверхности пластинки. Так, при $K_T = 10^{-4}$, в пластинке размером $200 \times 100 \times 5$ нм дополнительно к показанным на рисунке 5.4 появляется двухвихревая структура (см. рисунок 5.8).

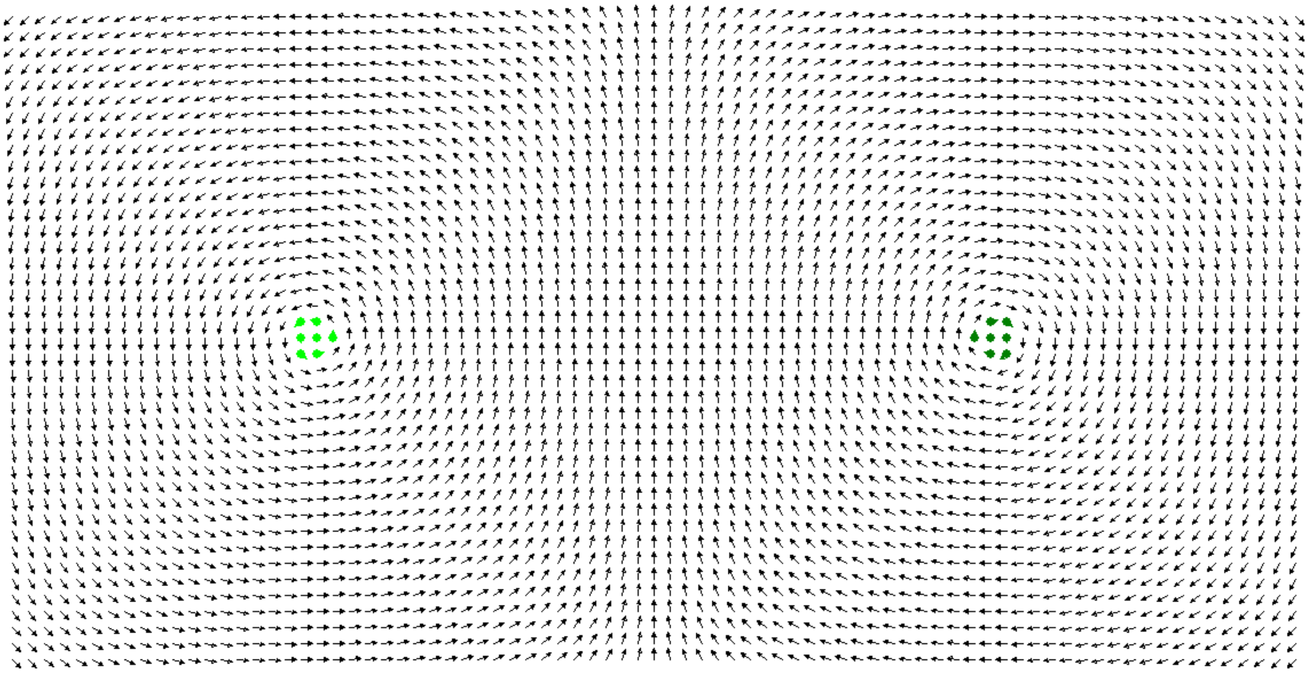


Рисунок 5.8 – Двухвихревая структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $200\times100\times5$ нм при $K_T=10^{-4}$.

Увеличение поверхности пластинки до 900×450 нм при $K_T=0.18$ приводит к тому, что случайные выборки начального поля **m** приводят к лабиринтным доменным структурам, одна из которых показана на рисунке 5.9. На рисунке 5.9 и других рисунках настоящего раздела, изображающих векторные поля с большим количеством векторов, серым цветом закрашены области, в которых поле намагниченности **m** ориентировано преимущественно по оси *z* (вверх). В светлых областях поле **m** ориентировано преимущественно в направлении, противоположном оси *z* (вниз). В темных областях поле **m** ориентировано преимущественно в плоскости пластинок. В данном случае (рисунок 5.9) темные области являются доменными границами.

На рисунке 5.10 показаны две пластинки одинаковой толщины (10 нм), но разной площади. Как видно из рисунка, характерная ширина доменов и доменных границ уменьшается с увеличением толщины пластинки и не зависит (или почти не зависит) от площади пластинки. Независимость ширины доменов от площади пластинки позволяет объяснить, почему лабиринтная структура не возникает в пластинке размером $100\times50\times5$ нм. Как видно на рисунке 5.9, характерная ширина лабиринтных доменов приблизительно соответствует ширине пластинки размером $100\times50\times5$ нм, и такая структура в малой пластинке не проявляется.

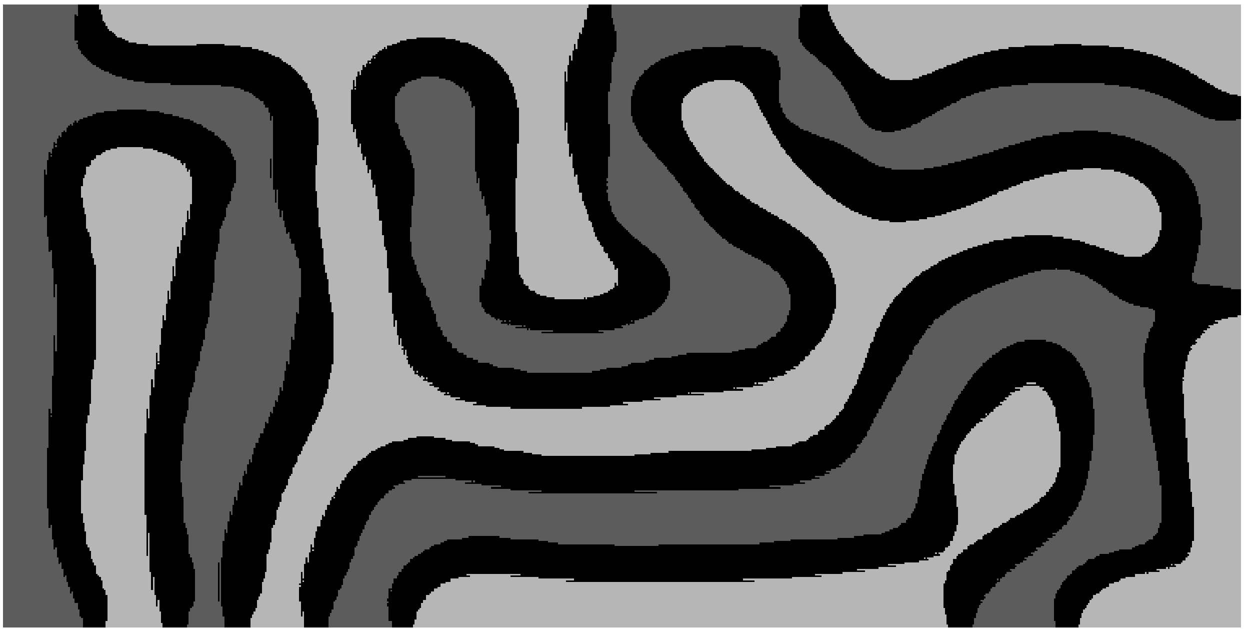


Рисунок 5.9 – Лабиринтная доменная структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $900 \times 450 \times 5нм$. Расчетная сетка 241×121 точек.

На рисунке 5.11, представленном в работе [170], показана лабиринтная структура, обнаруженная магнитооптическим методом Керра на поверхности пластинки $Nd_2Fe_{14}B$ толщиной 60 мкм с ОЛН, ортогональной плоскости пластинки. Аналогичный результат эксперимента представлен и в работе [171].

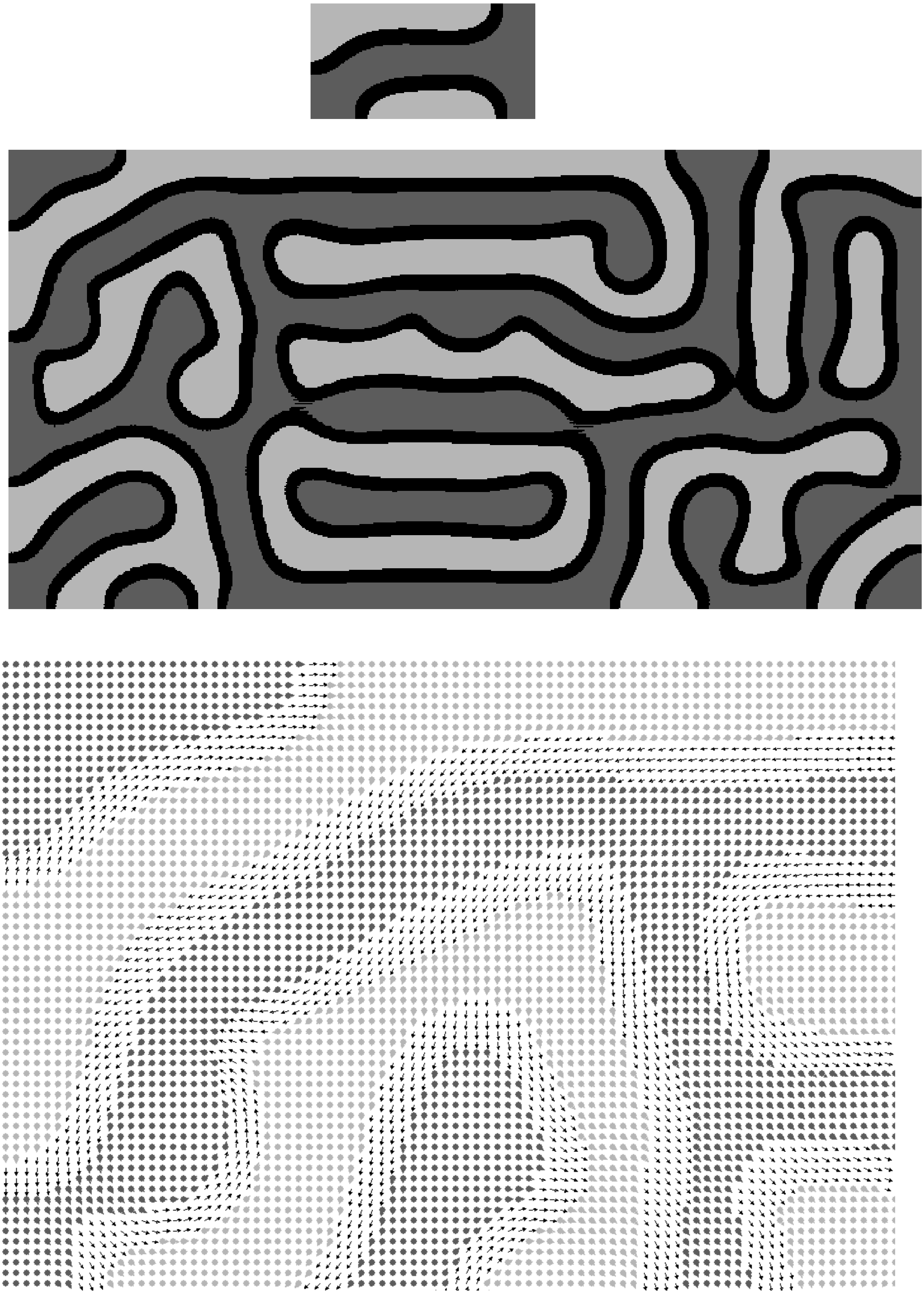


Рисунок 5.10 – Пластинки $Nd_2Fe_{14}B$ размером $200\times100\times10\,нм$ (вверху) и $900\times450\times10\,нм$ (в центре). Расчетные сетки содержат соответственно 241×121 и 161×81 точек. Внизу показан верхний левый угол пластинки $900\times450\times10\,нм$.

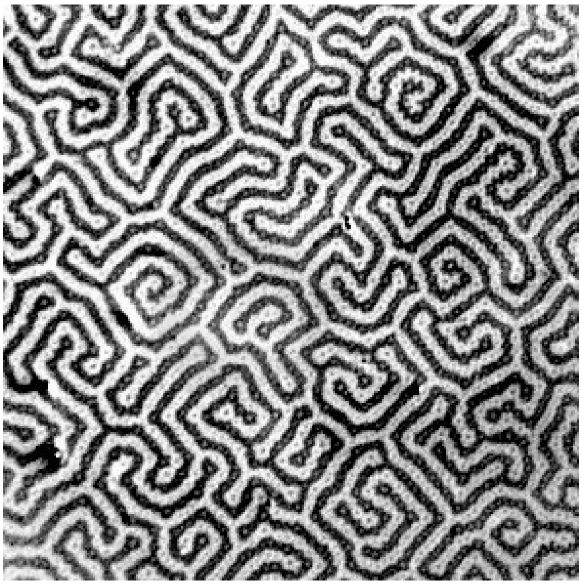


Рисунок 5.11 – Лабиринтная доменная структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ толщиной 60 мкм [170]. Характерная ширина доменов составляет 2.8 мкм.

В работе [172] исследовались тонкие пленки $FePd$ с перпендикулярной магнитной анизотропией. Доменная структура, обнаруженная в пленках толщиной 5 и 11.5 нм, представляла смесь полосовых и небольших по сравнению с полосовыми пузырчатых доменов (рисунок 5.12). После воздействия на пленку толщиной 5 нм переменного внешнего поля с затухающей амплитудой пузырчатые домены исчезают, а ширина полосовых доменов уменьшается и полоски выравниваются. В результате фрагмент доменной структуры на рисунке 5.12 становится похожим на доменную структуру, показанную на рисунке 5.9. Как можно заметить, относительное изменение ширины доменов от толщины пленки в эксперименте и в расчетных случаях (см. рисунки 5.9, 5.10 и 5.13) приблизительно одинаково: при увеличении толщины пластинки (пленки) от 5 до 10 нм ширина доменов уменьшается в 1.3 – 1.6 раз.

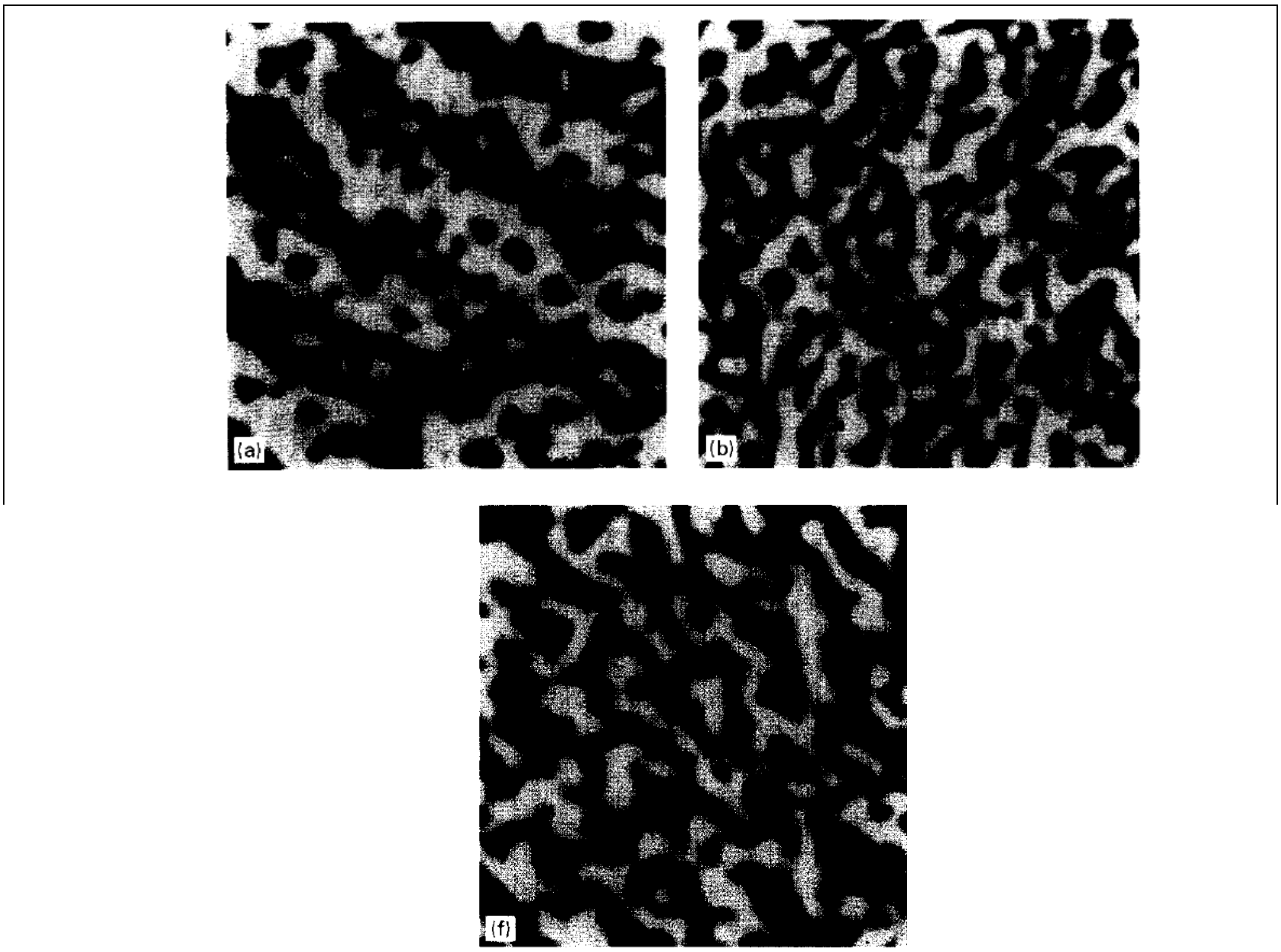


Рисунок 5.12 – Доменная структура в тонкой пленке *FePd* [172]; (a) – толщина пленки 5 нм; (b) – 11.5 нм; (f) – пленка толщиной 5 нм после действия переменного внешнего поля с затухающей амплитудой.

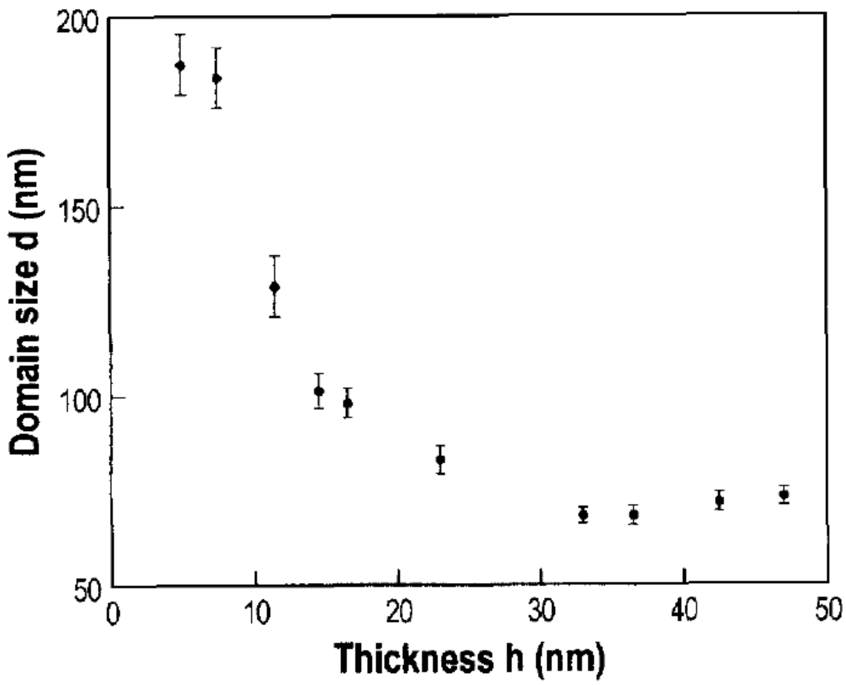
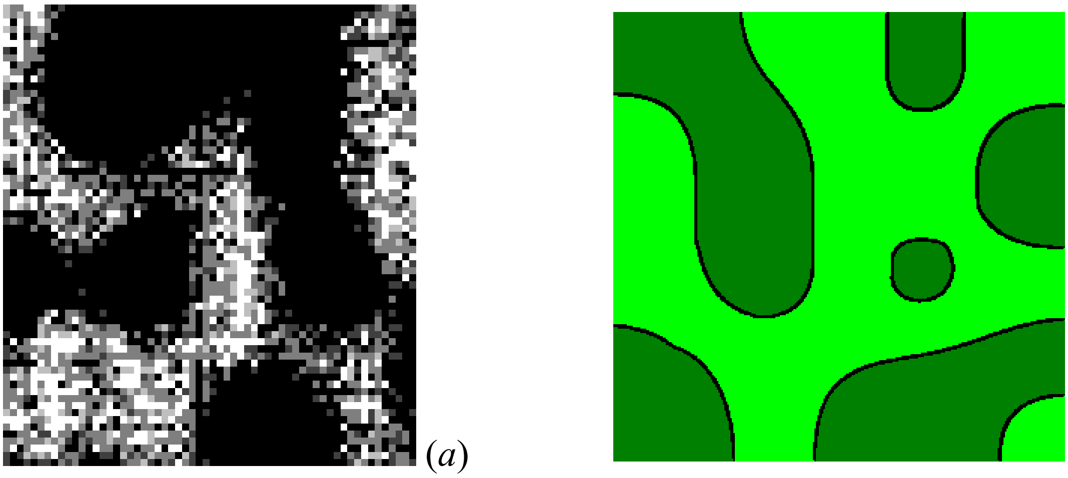


Рисунок 5.13 – Зависимость размера доменов от толщины пленки *FePd* [172].



(*а*) (*б*)

Рисунок 5.14 – (*а*) фрагмент доменной структуры (рисунок 5.12b) размером 400×400 нм; (*б*) доменная структура в пластинке *FePd* размером $400 \times 400 \times 11.5$, рассчитанная на сетке 301×301 точек.

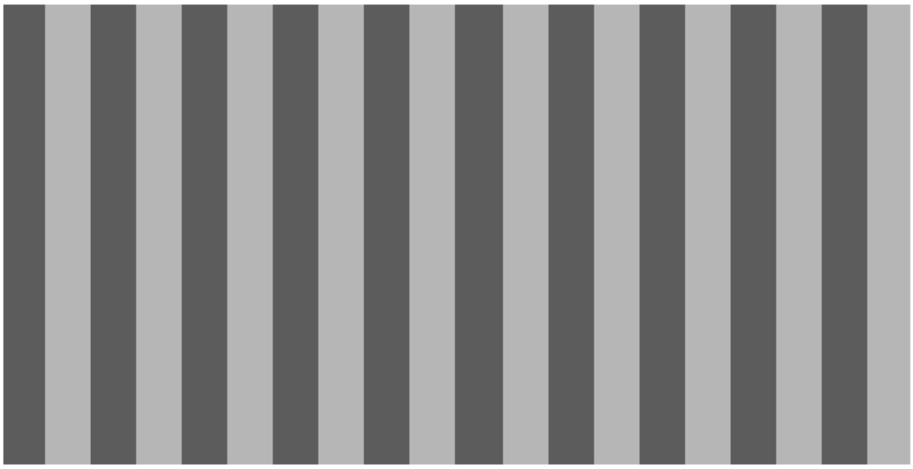
На рисунке 5.14 показаны фрагмент экспериментально наблюдаемой доменной структуры в пленке толщиной 11.5 нм и доменная структура, рассчитанная для пластинки *FePd* такого же размера. При расчете использовались значения магнитных параметров $K_1 = 1.5 \times 10^7 \frac{эрг}{см^3}$, $K_2 = 0 \frac{эрг}{см^3}$ и $M_s = 1030 Гс$, которые получены авторами работы [153] на тех же образцах пленок, на которых наблюдались доменные структуры, показанные на рисунке 5.12. Значение константы обмена A для монокристалла *FePd* составляло $6.9 \times 10^{-7} \frac{эрг}{см}$ [42]. Как видно на рисунке экспериментально наблюдаемая и расчетная доменные структуры идентичны.

Хорошо известно [4], что в тонких пленках на распределение намагниченности существенно влияет поверхностная магнитная анизотропия. Проведенное в работе [173] исследование пленок Co-Cu-Co показало влияние на поверхностную анизотропию таких факторов как шероховатость поверхности и термическая обработка. В работе [42] авторы сообщают, что в пленках *FePd* полученных одинаковым способом, но при разных температурах подложки константы поверхностной анизотропии могут отличаться в четыре раза. Таким образом, для корректного сравнения расчетных и экспериментальных данных, в тонких пленках следует учитывать по возможности все параметры конкретного образца, на котором проводились экспериментальные исследования.

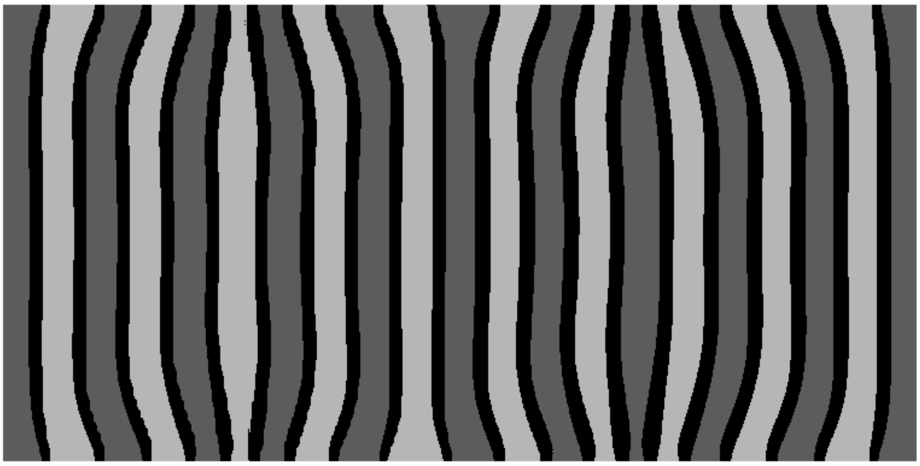
Кажется естественным объяснить асимметричность лабиринтной структуры тем, что из хаотического начального состояния система в процессе эволюции «не доходит» до симметричного состояния, «застревая» в локальных минимумах, соответствующих асимметричным структурам. Для проверки этого предположения в пластинке размером $900 \times 450 \times 10$ нм в качестве начального состояния задавалась симметричная структура из 21 полосы (рисунок 5.14*а*), в которой ширина полос примерно соответствовала показанным на рисунке 5.10. В результате полосы искривились только у краев пластинки.

Аналогичный результат получился и для 18 полос. Если в начальном состоянии количество полос уменьшить до 8 (что соответствует увеличению ширины полос), то они распадаются и возникает лабиринтная структура, аналогичная полученной из хаотического состояния (рисунок 5.15). Поскольку увеличение ширины полос уменьшает суммарную длину доменных границ, оно способствует понижению энергии обмена и энергии анизотропии. Поэтому распад полосовой структуры в данном случае происходит под действием собственного размагничивающего поля пластинки. На фрагменте векторного поля (рисунок 5.14*в*) видно, что искривление полос происходит на участках, где блоховская (в центре пластинки) граница переходит в преимущественно неелевскую (у краев). Такое изменение типа границы в пределах одной длинной границы в пластинке большой площади оказывается энергетически выгодным, поскольку блоховский участок границы не создает объемных источников собственного магнитного поля, а отклонение поля $\mathbf{m}$ у краев пластинки к поверхности пластинки уменьшает поверхностные источники собственного поля.

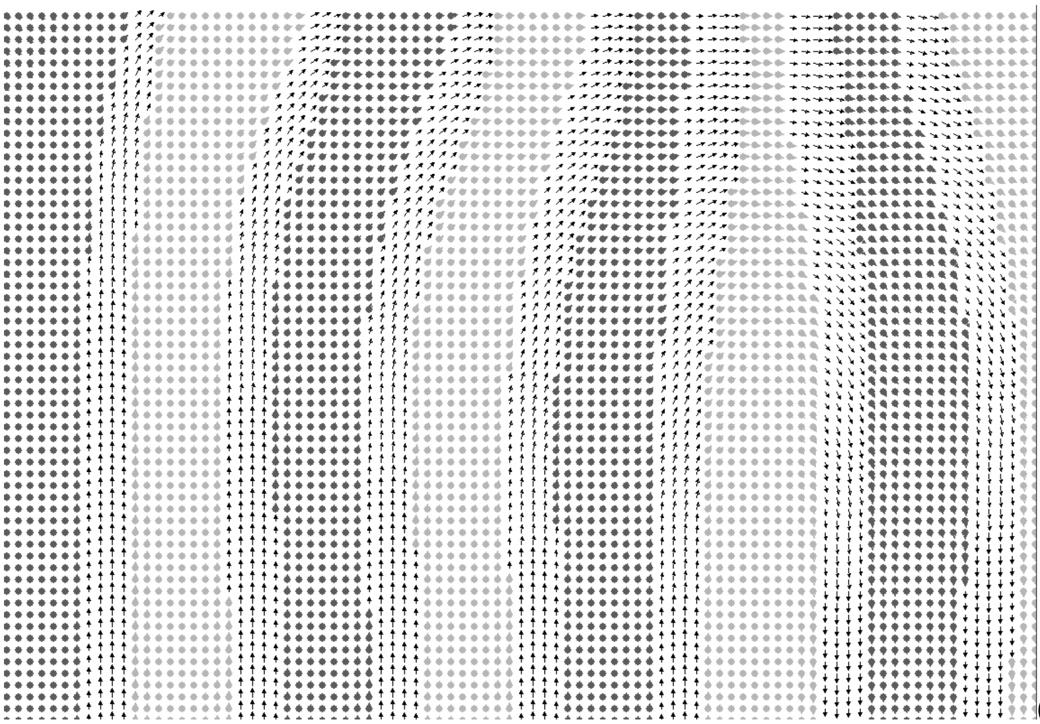
Таким образом, некоторая асимметрия появляется и в симметричной в начальном состоянии полосовой доменной структуре. Можно ожидать, что при увеличении площади пластинки размер искривленных участков доменов у краев пластинки сохранится и, следовательно, их относительный размер будет убывать. В результате в пластинке большой площади доменная структура на рисунке 5.14*б* будет выглядеть как полосовая с блоховскими границами.



(*а*)



(*б*)



(*в*)

Рисунок 5.14 – *б* - доменная структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $900 \times 450 \times 10 нм$, полученная из начального состояния с 21 полосой (*а*); *в* – фрагмент поля **m** (верхний левый угол).

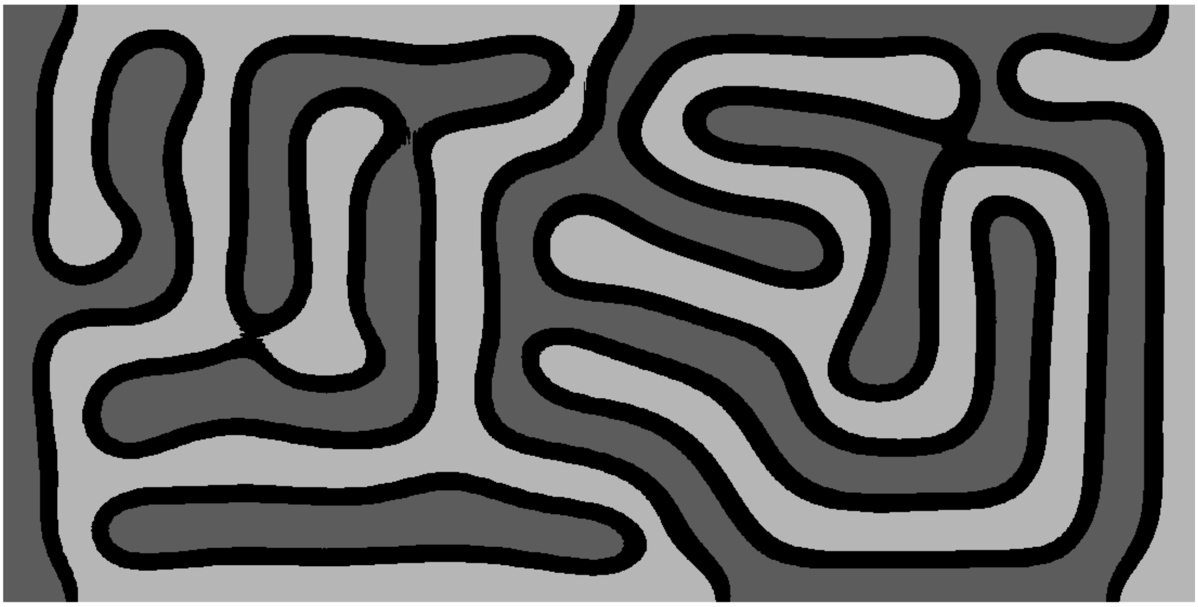


Рисунок 5.15 – Доменная структура в пластинке $Nd_2Fe_{14}B$ размером $900 \times 450 \times 10 нм$, полученная из начального состояния (рисунок 5.14*a*) с 8 полосами.

На фрагменте векторного поля, полученного из хаотического начального состояния, видно (рисунок 5.10, низ), что у краев пластинки (левая и верхняя границы пластинки) поле **m** также прижимается к поверхности, но в пределах одной границы намагниченность может многократно изменять направление, что означает изменение направления вращения векторов вдоль линии границы. Естественно предположить, что изменение направления вращения способствует искривлению границ внутри пластинки структуры.

Результаты расчетов, представленные в настоящем разделе и их сравнения с экспериментальными наблюдениями ряда авторов, позволяют сделать вывод о том, что многообразие доменных структур зафиксированных на тонких пленках и других образцов разного размера могут быть обусловлены влиянием только одного параметра - магнитной анизотропии.

5.3 Влияние толщины пластинки кобальта на структуру доменных границ

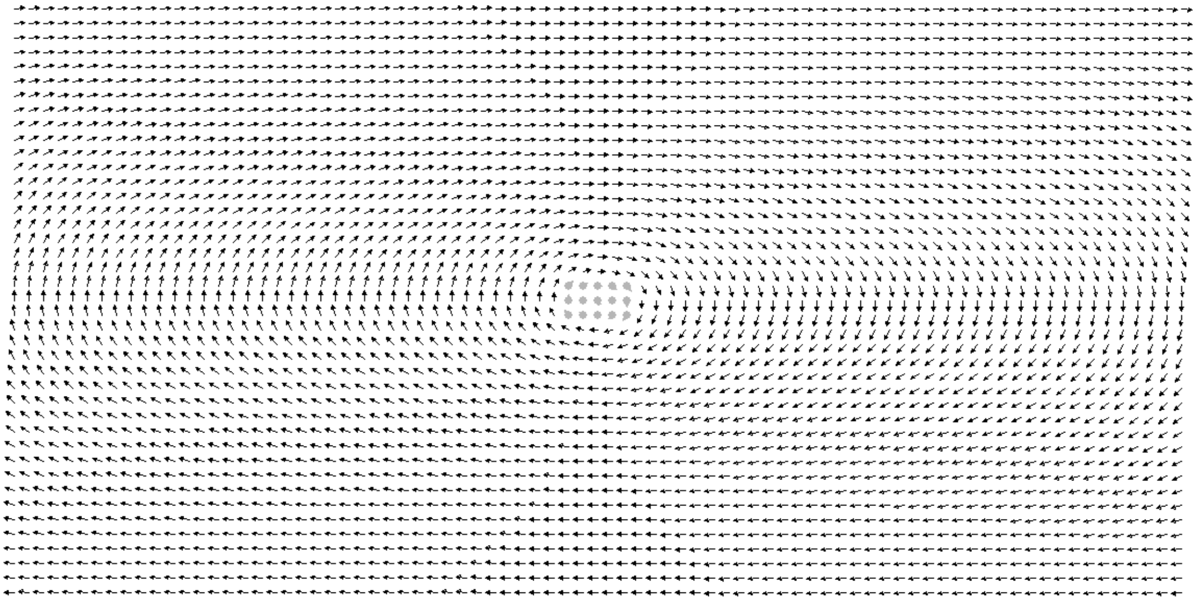
Результаты расчетов доменных структур для бесконечно длинных монокристаллов Co с поперечной ориентацией осей легкого намагничивания, представленные во 2-ой и 3-ей главах, показывают хорошее соответствие с ранее известными экспериментальными наблюдениями. Основные домены, ориентированные вдоль ОЛН, разделены блоховскими границами. Но в тонких пластинках (пленках) с планарной магнитной анизотропией, наблюдаются неелевские доменные границы. В связи с этим представляет интерес проследить механизм превращения неелевских границ в блоховские по мере увеличения толщины пластины без изменения других параметров [72, 174, 175]. На рисунках 5.16 и 5.17 представлены структура поля **m** и доменная структура в пластинках Co размеров 100x50нм разной толщины (5, 10, 50 нм).

Как и ранее, на этих рисунках темными кружками отмечены векторы, ориентированные преимущественно по оси z (вверх от плоскости рисунка), а светлыми кружками - ориентированные преимущественно противоположно оси z. При расчетах полей намагниченности для пластинок толщиной 5 и 10 нм использовался метод, описанный в разделе 5.1. Для пластинок толщиной 50 нм задача решалась в полной (трехмерной) постановке методом, описанным в разделе 4.1 применительно к конечной области **D**. Для пластинок бесконечной толщины (бесконечно длинных стержней) использовался метод, описанный в главе 2. На рисунках везде показана проекция векторных полей на крупную сетку.

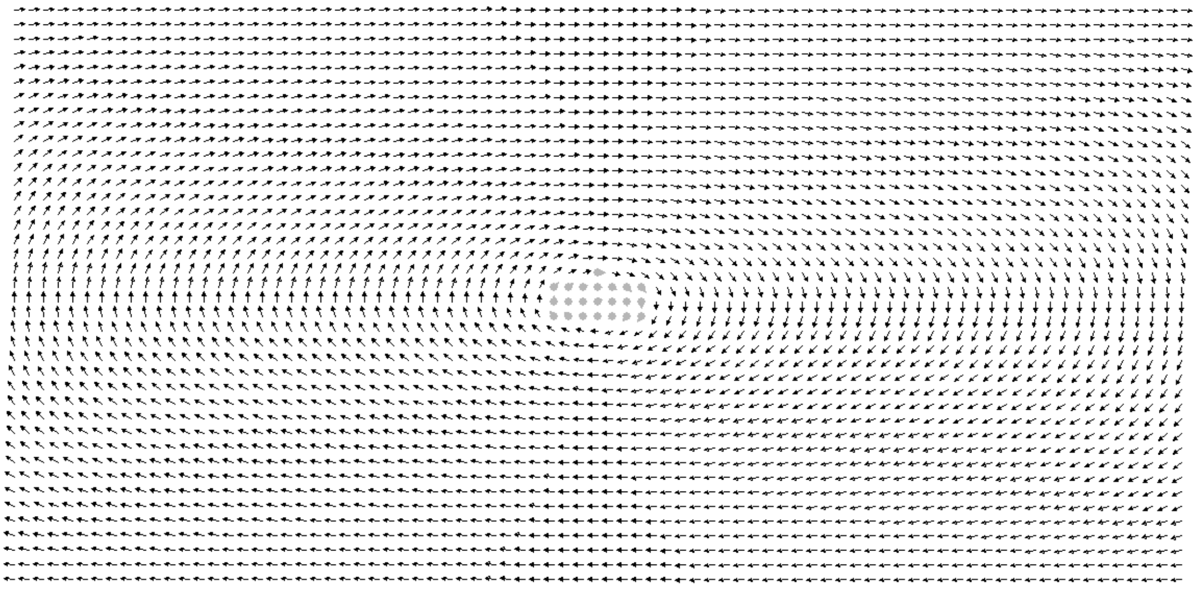
Как уже отмечалось в разделе 5.2 все структуры, показанные на рис 5.5, мало отличаются от структур в пластинке Co размером $157\times78\times7.8$ нм с той же ориентацией ОЛН (ортогонально плоскости пластинки). Если размер пластинки Co уменьшить до $100\times50\times5$нм, а ось легкого намагничивания ориентировать в плоскости пластинки (по оси x), то структуры, показанные на рисунке 5.5, сохраняются с некоторыми изменениями. В качестве примера таких изменений на рисуноке 5.16*а* приведена структура, которая получается при изменении ориентации ОЛН из структуры на рисунке 5.5*в,* а на рисунке 5.17*а* – из структуры на рисунке 5.5*д*.

На рисунке 5.16*а* виден вихрь в центре неелевской границы являющийся зародышем блоховской границы (блоховской точкой), которая растягивается вдоль оси легкого намагничивания при увеличении толщины пластинки от от 5 до 10 нм (рисунок 5.16*б*). В среднем сечении пластинки толщиной 50 нм почти вся граница становится блоховской (рисунок 5.16*в*) и мало отличается от границы в бесконечно длинном стержне, показанной на рисунке 5.16*г*. На рисунке 5.16*в* видно, что на поверхностях пластинки вектора намагниченности склоняются к поверхности, а направление границы поворачивается к диагонали прямоугольника. Поворот границы усиливается при увеличении толщины пластинки и присутствует на торцевой поверхности полубесконечного стержня (рисунок 4.4). Следовательно он не связан с взаимодействием через собственное поле верхней и нижней поверхностей.

Доменная структура на рисунке 5.17*а* напоминает двухполосную доменную структуру Ландау в бесконечно длинной призме и отличается от классической структуры Ландау типом доменной границы, разделяющей полосовые домены. Эта граница содержит три вихря и ее нельзя назвать ни блоховской ни неелевской.

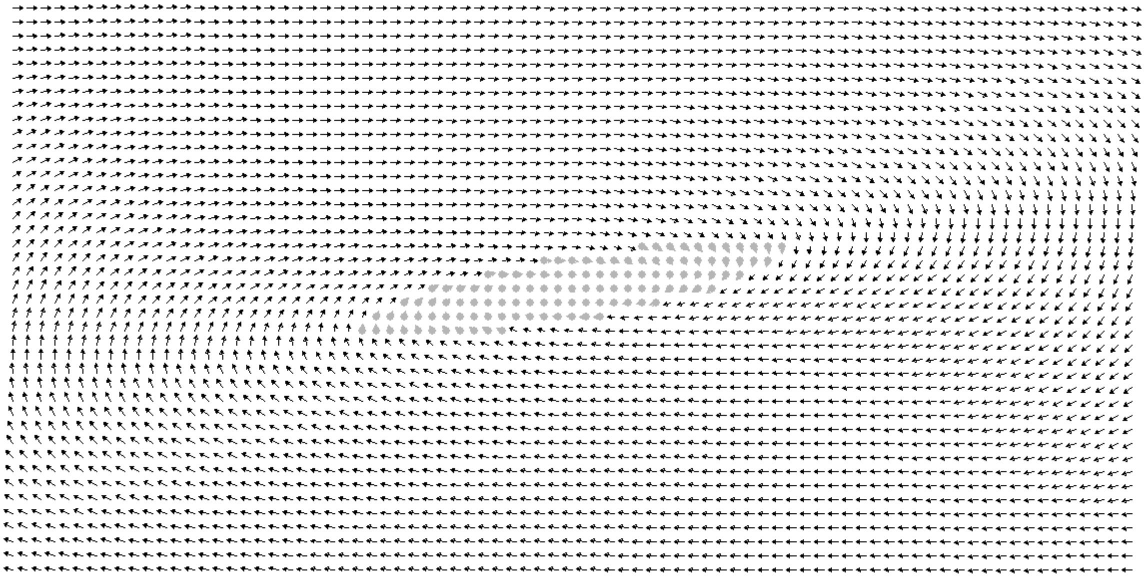


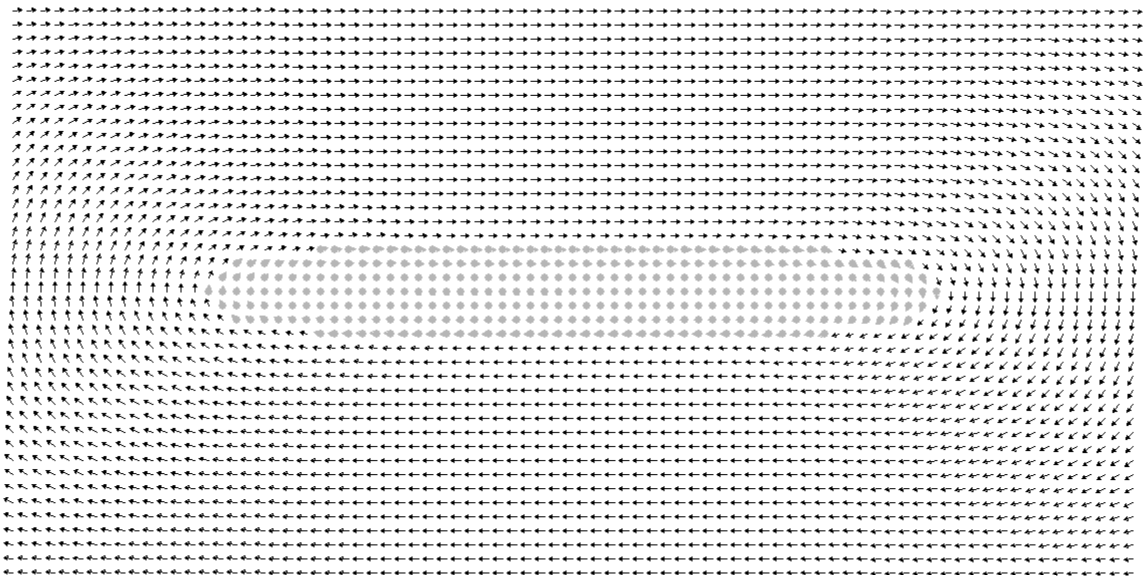
(*а*)

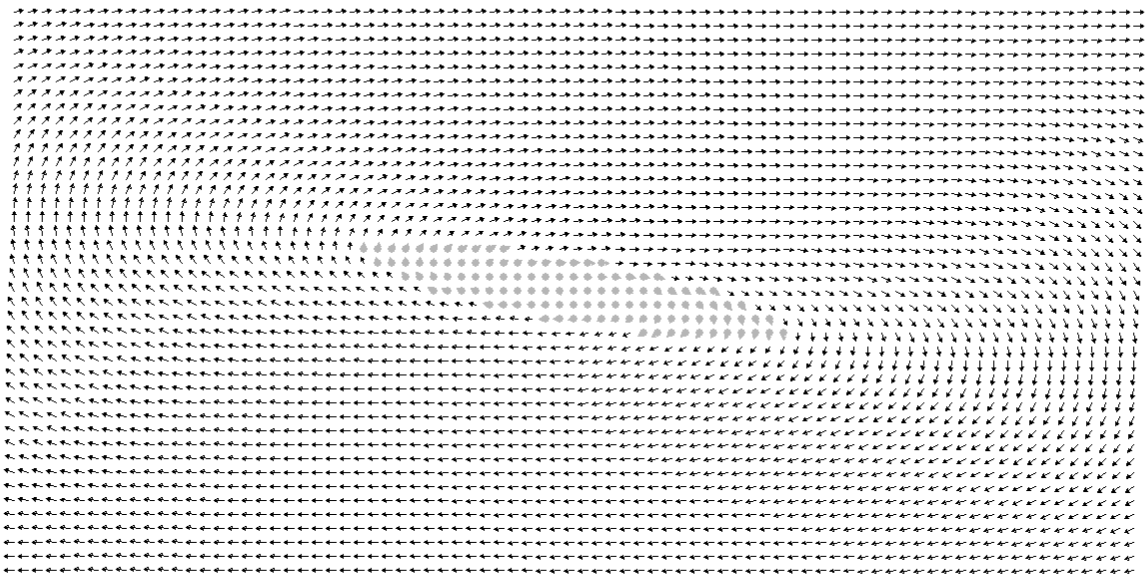


(*б*)

Рисунок 5.16 *а* - *б*







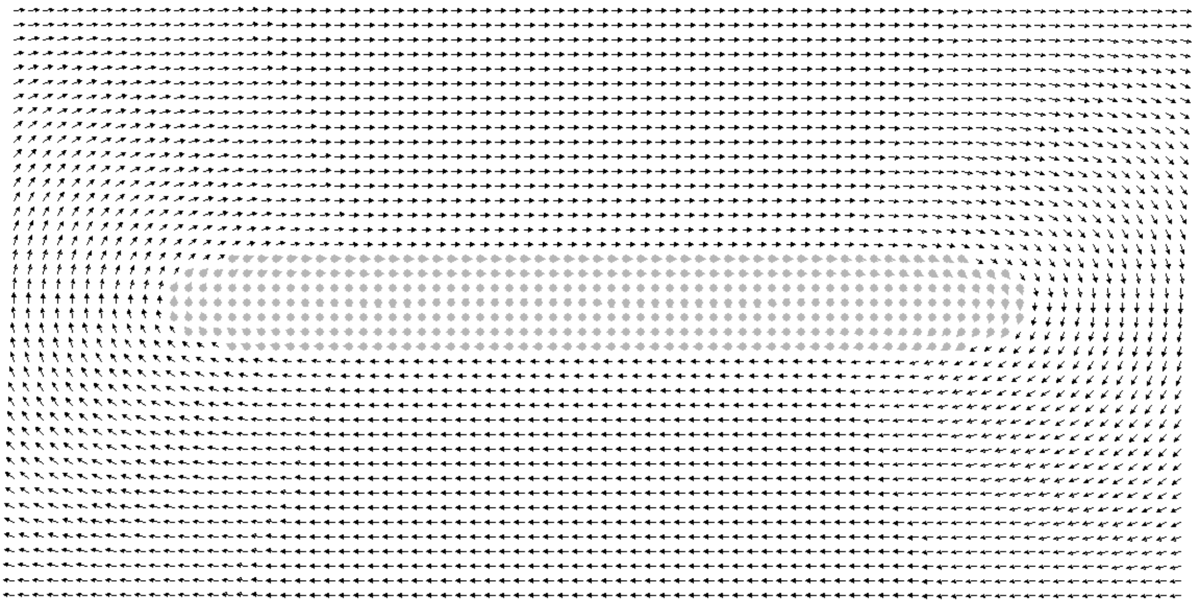
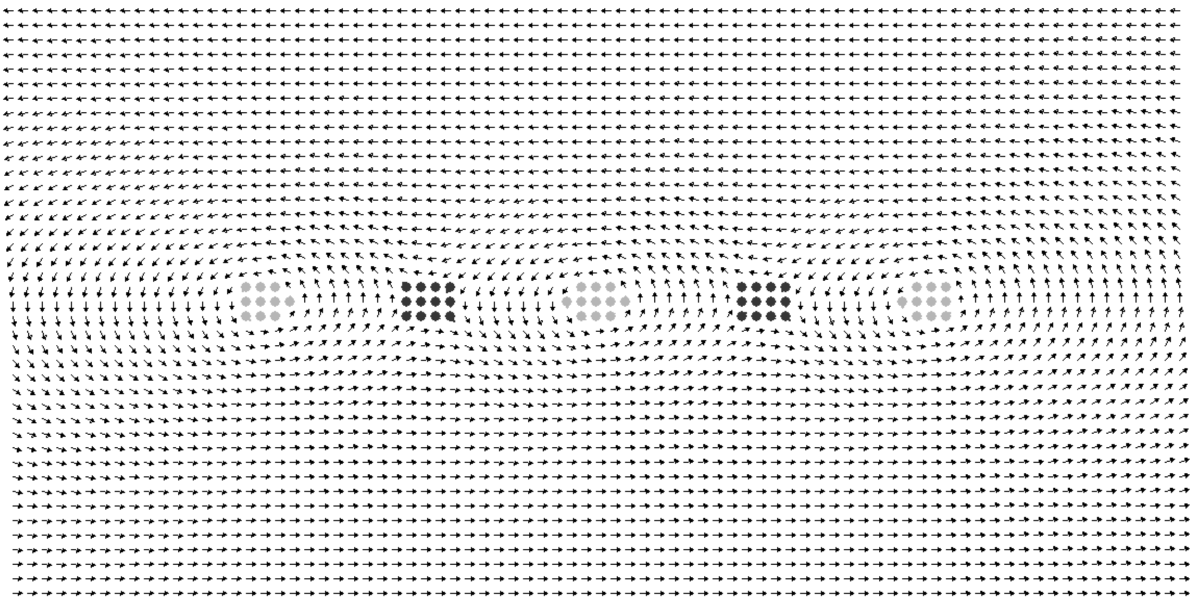
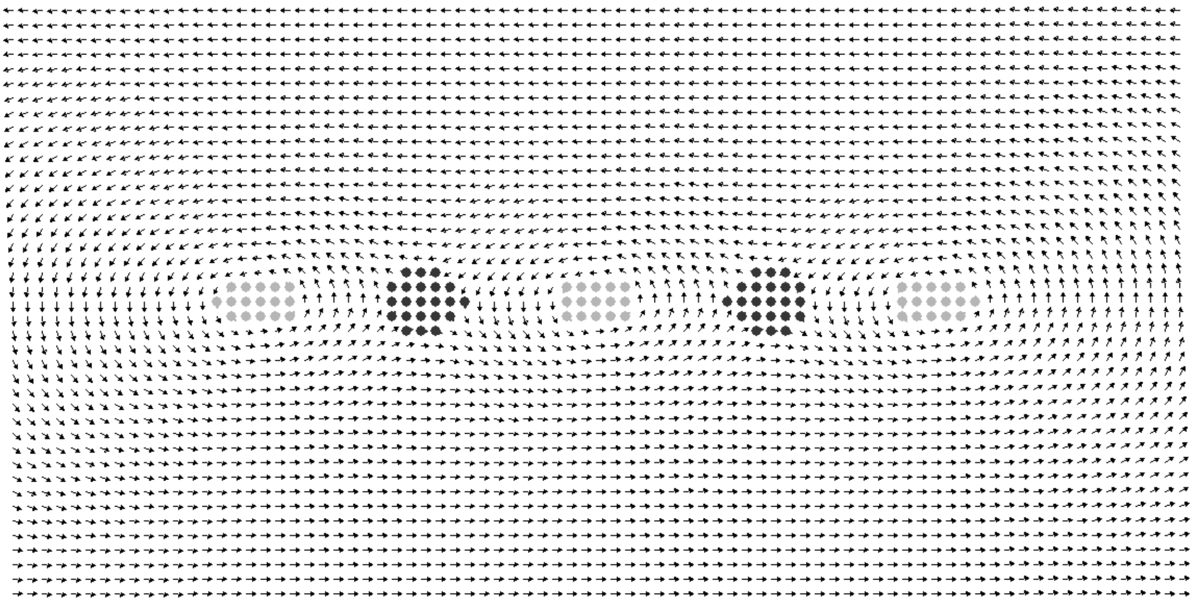

(*г*)

Рисунок 5.16 *в-г*

На рисунке 5.16 изображены: *а* – структура поля **m** в пластинке *Co* размером $100 \times 50 \times 5$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.5 *в*, при изменении ориентации ОЛН от ортогональной к плоскости пластинки к продольной; *б* - структура поля **m** в пластинке *Co* размером $100 \times 50 \times 10$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.16 *а* при увеличении толщины пластинки; *в* - структура поля **m** в пластинке *Co* размером $100 \times 50 \times 50$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.16 *б* при увеличении толщины пластинки. Сверху вниз: верхняя поверхность, среднее сечение, нижняя поверхность; *г* - доменная структура в бесконечно длинном стержне *Co* сечением 100×50 нм.



(*a*)



(*б*)

Рисунок 5.17 *а* - б

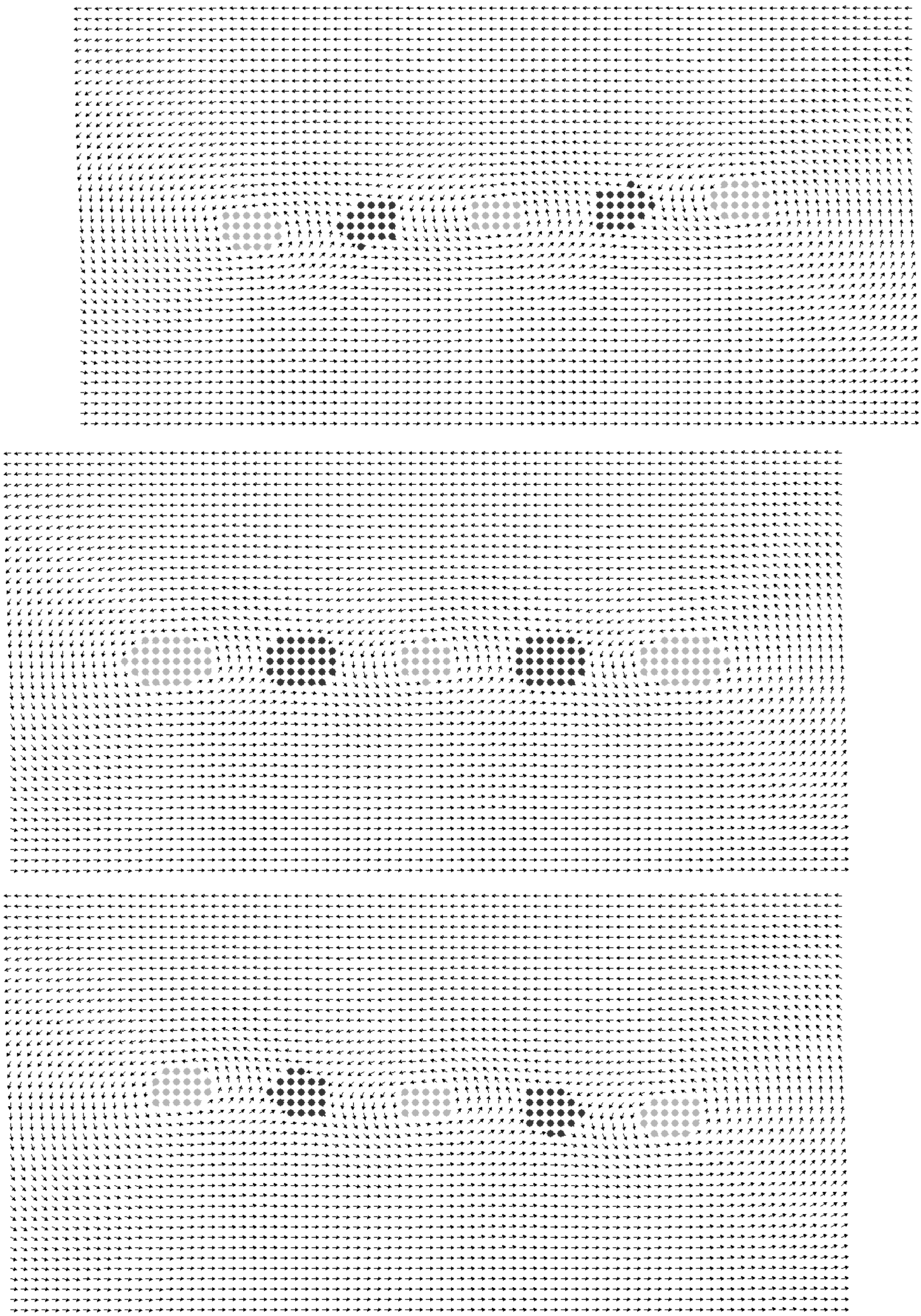


Рисунок 5.17 *в*

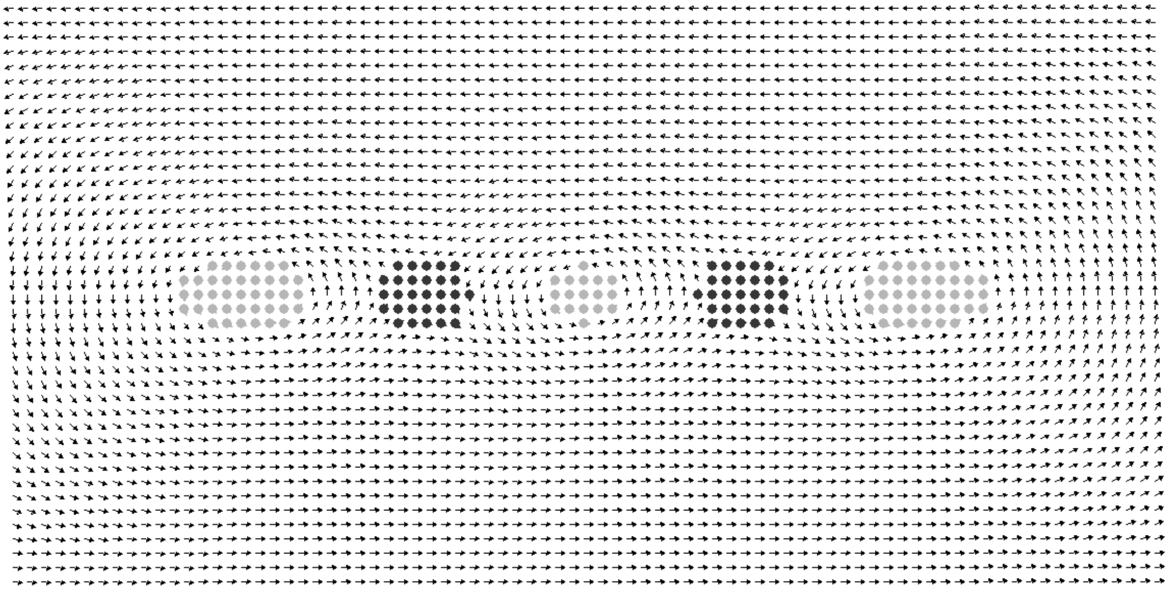

(*г*)

Рисунок 15.17 *г*

На рисунке 5.17 изображены: *а* - доменная структура в пластинке *Co* размером $100\times50\times5$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.5 *д*, при изменении ориентации ОЛН от ортогональной к плоскости пластинки к продольной (по оси *x*); б - доменная структура в пластинке *Co* размером $100\times50\times10$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.17 *а*, при увеличении толщины пластинки; *в* - доменная структура в пластинке *Co* размером $100\times50\times50$ нм, полученная из начального состояния, показанного на рисунке 5.17 *б* при увеличении толщины пластинки. Сверху вниз: верхняя поверхность, среднее сечение, нижняя поверхность; *г* - доменная структура в бесконечно длинном стержне *Co* сечением 100×50 нм. В качестве начального состояния использовано поле намагниченности в среднем сечении пластинки толщиной 50 нм (рисунок 5.14 *в*).

Вектора намагниченности в центрах этих вихрей ориентированы против оси *z*, а в местах контакта вихрей имеются две области, в которых поле намагниченности ориентировано по оси *z*. Таким образом, доменная граница содержит пять зародышей блоховской границы. Как и в предыдущем случае, размер зародышей растет при увеличении толщины пластинки (рисунок 5.17 *б* – *в*), однако зародыши полностью не поглощают неелевские участки границы, которые сохраняются и в бесконечно длинном стержне (рисунок 5.17*г*).

Таким образом, представленные выше результаты расчетов показывают, что в пластинке *Co* с увеличением толщины пластинки изменение типа границ от неелевских к блоховским происходит непрерывно за счет роста зародышей блоховских границ. Такой тип границ, называемый "границы с перевязками", наблюдается экспериментально в пленках определенной толщины и считается переходным типом между неелевскими и блоховскими ганицами.

Из примера, приведенного на рисунке 5.17, следует, что не всегда доменная граница неелевского типа, с увеличением толщины пластинки полностью превращается в блоховскую. Этот результат после экспериментального подтверждения может уточнить сложившиеся представления о трансформации доменной границы в зависимости от толщины пленки. Следует заметить, что при расчетах полей намагниченности в бесконечно длинном монокристалле с физически обоснованным начальным состоянием, показанной на рисунке 5.17*г* доменной структуры получить не удалось.

5.4. Магнитная запись на доменных границах монокристаллической пленки

В различных областях электроники, в том числе в вычислительной технике широко используется энергонезависимая запись информации на магнитных носителях. Совершенствованию методов, материалов и технических средств записи и считывания информации с магнитных носителей посвящено огромное количество публикаций (см. например [10, 176-194]).

Одной из основных характеристик магнитного носителя является плотность магнитной записи, которую обычно определяют как число информационных битов, приходящихся на квадратный дюйм ($\mathrm{bit/inch}^2$). В последнее время удалось существенно повысить плотность магнитной записи за счет перехода от планарной записи к перпендикулярной, использующей домены, намагниченные нормально к плоскости дорожки записи.

По мнению автора работы [187] предельная плотность записи традиционными методами может достигать $1\,\mathrm{Tbit/inch}^2$. В работе [188] прогнозируется возможность записи на поликристаллической ферромагнитной структуре с плотностью до $10\,\mathrm{Tbit/inch^2}$.

Плотность магнитной записи на поликристаллической структуре ограничивает эффект суперпарамагнетизма. Этот эффект обусловлен тем, что информационные биты, представленные одним доменом-кристаллитом (или набором кристаллитов), перемагничивается под действием тепловых флуктуаций, что приводит к потере информации. Но магнитные среды предоставляют возможности записи информации не только на доменах, но и на доменных границах, а также элементах доменных границ [176].

Оценить такие возможности можно с помощью микромагнитного моделирования на примере монокристаллической пленки высокоанизотропного магнетика. В такой пленке магнитостатическим (собственным) полем формируется полосовая доменная структура, и информационными битами могут служить блоховские границы доменов [195-198].

Отрезок дорожки магнитной записи моделируется пластинкой одноосного магнетика с размерами по координатным осям *x, y* и *z,* равными 80, 20 и 10 нм соответственно. Ориентация координатных осей показана на рисунке 5.18, а начало координат расположено в центре левой грани пластинки. Поле $\mathbf{M} = \mathbf{M}(x,y,z)$ предполагается трехмерным и рассчитывается путем нахождения стационарных решений уравнения Ландау-Лифшица, которое можно записать в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \tau} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff} - \lambda \mathbf{m} \times \left(\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{eff}\right), \tag{5.9}$$

$$\mathbf{h}_{eff} = \frac{\mathbf{H}_{eff}}{M_s} = -\nabla U + \frac{\mathbf{H}_{ext}}{M_s} + \frac{2A}{M_s^2 L^2}\Delta \mathbf{m} + \frac{2}{M_s^2}\mathbf{w}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{w})(K_1 + 2K_2(1-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{w})^2)).$$

Уравнение (5.9) отличается от (4.1) дополнительным членом в выражении для эффективного поля, учитывающим напряженность внешнего поля $\mathbf{H}_{ext}$, и решалось с помощью обычной явной конечно-разностной схемы. Для вычисления потенциала использовался метод, описанный в главе 4 для случая конечной расчетной области. На всех гранях пластинки для уравнения (5.9) задается граничное условие отсутствия поверхностной энергии $\partial \mathbf{m}/\partial(-\mathbf{n}) = \mathbf{0}$. В уравнении (5.9) сохранены все обозначения уравнения (4.1). Следует напомнить, что в выражении для эффективного поля $\mathbf{h}_{eff}$ безразмерный потенциал собственного поля U выражен в единицах LM_s, а дифференцирование в операторах ∇ и Δ проводится по координатам, выраженным в единицах L. В качестве образца для микромагнитного моделирования выбраны пластинки с магнитными параметрами $Nd_2Fe_{14}B$, приведенными в главе 2, и параметром $\lambda = 0.2$. Ось легкого намагничивания ориентировалась вдоль координатной оси y. В ходе выполнения расчетов использовалось проецирование решений с одной сетки на другую. При изображении векторных полей показана проекция полей намагниченности на крупную сетку.

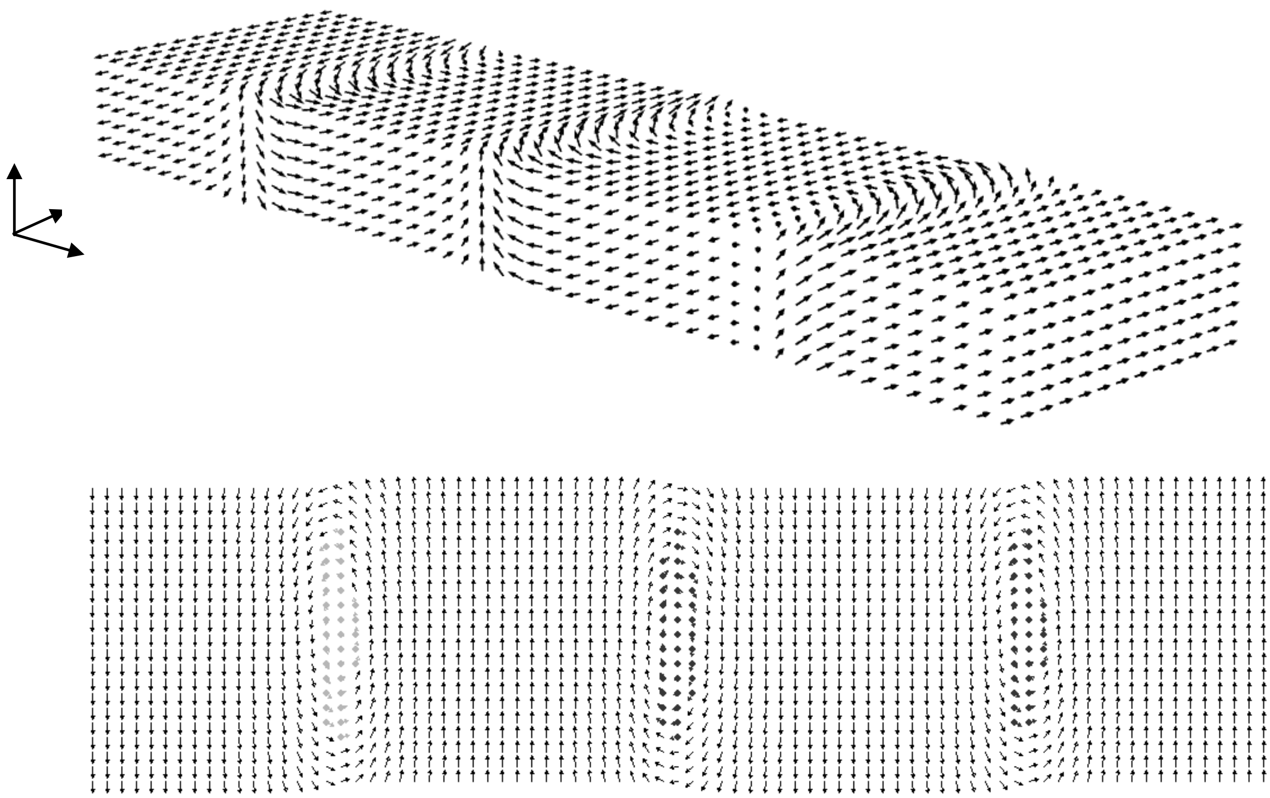


Рисунок 5.18 – Полосовая доменная структура в пластинке $80 \times 20 \times 10$ нм. Вверху общий вид, внизу – проекция векторного поля в среднем сечении *z=0* на плоскость *xy*. Темными кружками отмечены векторы, ориентированные преимущественно по оси *z* (вверх), светлыми – в направлении –*z* (вниз). Показана проекция поля намагниченности на крупную сетку.

Полосовая доменная структура, показанная на рисунке 5.18, получается из начального размагниченного состояния со случайной ориентацией векторов **m**. При изображении проекции векторного поля на координатную плоскость *xy* темными кружками отмечены векторы, ориентированные преимущественно по оси z (вверх), светлыми – в направлении $-z$ (вниз). Для проверки влияния длины пластинки на вид доменной структуры аналогичная задача решалась для пластинки $200\times20\times10$ нм в квазидвумерной постановке методом, описанным в разделе 5.1. В последнем случае три случайных выборки начального поля дали 9, 10 и 12 полосовых доменов. На рисунке 5.19 показана полоска с 10 доменами.

Таким образом, в обеих пластинках доменная структура оказалась одинаковой с размером доменов около 20×20 нм. Домены разделены границами, близкими по структуре к блоховским, в центре которых намагниченность ориентирована вдоль оси z в положительном или отрицательном направлениях. В случае, показанном на рисунке 5.19, левая граница ориентирована в направлении $-z$, а остальные – в направлении z.

Аналогичные полосовые доменные структуры получаются, если в качестве начального выбрать состояние, в котором поле **m** ориентировано нормально к плоскости пластинок с небольшим случайным отклонением от нормали, без которого система оказывается в состоянии лабильного равновесия. В последнем случае, при установлении устойчивого равновесия, границы доменов ориентируются преимущественно по начальной ориентации поля **m**.

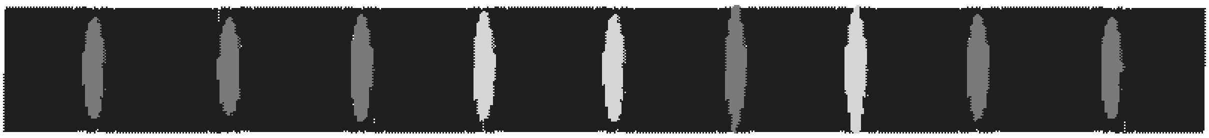


Рисунок 5.19 – Доменная структура в полоске $200\times20\times10$ нм. Каждый вектор показан одной точкой: темным цветом показаны векторы, ориентированные преимущественно в плоскости пластинки, серым – преимущественно вверх, светлым – преимущественно вниз.

Зависимость компоненты собственного поля H^y на средней линии задней грани пластинки (y=10 нм, z=0 нм) и компоненты H^z на средней линии верхней грани пластинки (y=0 нм, z=5 нм) от координаты x (для доменной структуры, представленной на рисунке 5.18) показана на рисунке 5.20. Как видно из графика, граница между вторым и третьим доменами смещена от центра пластинки влево. В результате ширина второго (слева) домена оказывается на 2 нм меньше третьего.

Аналогичное небольшое различие в ширине внутренних доменов наблюдается и в длинной пластинке (рисунок 5.19).

Вариации ширины доменов обусловлена разной ориентацией границ: противоположно ориентированные границы притягиваются, а одинаково ориентированные отталкиваются. Если в доменной структуре, показанной на рисунке 5.18, все границы ориентировать одинаково, то второй и третий домены получаются одинаковой ширины. Домены на концах полоски всегда меньше внутренних. Максимальное значение величины H^z достигается над центрами границ и составляет на поверхности пластинки 4.9×10^5 А/м.

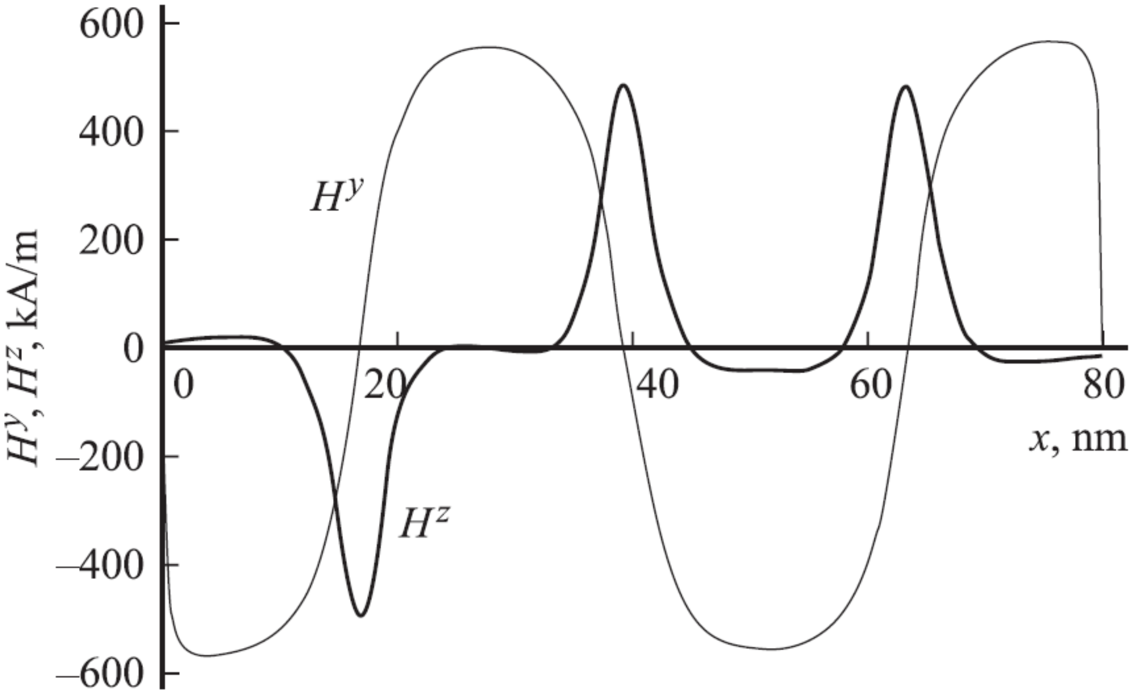


Рисунок 5.21 – Зависимость компонент собственного поля H^y и H^z от координаты *x*.

Компонента H^z намагниченности доменной границы может выполнять функцию информационного бита. Но для этого должна быть возможность индивидуального перемагничивания доменной границы (изменения ориентации H^z компоненты ее намагниченности). Для проверки такой возможности на отрезке между $x = 37.5$ нм и $x = 52.5$ нм длиной 25 нм, содержащем центральную границу (рисунок 5.18), включали внешнее поле напряженностью 2.4×10^5 А/м, направленное нормально к плоскости пластинки и противоположно ориентации H^z компоненты ее намагниченности. При этом доменная граница перемагничивалась, а остальная часть доменной структуры оставалась стабильной.

Таким образом, можно предложить два метода записи информации основанные: 1) на изменении знака компоненты H^y; 2) на разной величине нормальной компоненты H^z, которая над доменными границами существенно отличается от 0, а между границами (над доменами) близка к 0 (рисунок 5.20).

Поле, необходимое для перемагничивания границы, уменьшается с уменьшением констант анизотропии K_1 и K_2, которые в свою очередь уменьшаются с ростом температуры. Таким образом, перемагничивание границ можно осуществлять относительно небольшим магнитным полем с использованием локального нагрева соответствующего участка пластинки, содержащего необходимую границу. Так например, для перемагничивания центральной границы на отрезке пластинки длиной 25 nm, достаточно включить поле напряженностью 2.0×10^5 А/м, если нагреть этот отрезок до 450 К (при этом константы анизотропии уменьшатся в 2 раза).

Уменьшить магнитное поле, необходимое для перемагничивания доменной границы можно и за счет параметров дорожки записи, подбирая другие материалы. За счет этого можно также изменять плотность записи информации.

Например, если параметры M_S и $\mathbf{H}_{ext}$ увеличить в 2 раза, L уменьшить в 2 раза, K_1 и K_2 увеличить в 4 раза, а A оставить без изменения, то уравнение (5.9) и полученное выше решение не изменятся (в безразмерных единицах). В этом случае размер домена уменьшится до 10×10 нм. Такую же площадь будет занимать и бит информации, что соответствует плотности записи равной нескольким $\mathrm{Tbit/inch^2}$.

В заключение следует отметить принципиальное отличие предлагаемого метода магнитной записи на доменных границах от внешне близкого метода записи на доменах, при которой каждый бит информации располагается в одном домене-кристаллите. При записи на доменах соседние домены могут создавать магнитные поля перемагничивающие друг друга. Это предполагает дополнительные ограничения на размеры доменов и магнитные параметры дорожки записи, т.е. ограничивает плотность записи и снижает ее устойчивость. При записи на доменных границах ориентация намагниченности доменов чередуется и не изменяется при любой ориентации намагниченности информационных битов, что способствует повышению стабильности и плотности записи информации.

Заключение

Обобщение результатов исследований, проведенное в настоящей работе позволяет сделать следующие основные выводы.

Разработаны и проверены сравнением с экспериментальными данными достаточно эффективные численные методы моделирования магнитных структур ферромагнетиков разных формы и размеров:

- метод минимизации функционала свободной энергии микромагнитной системы, учитывающий неявную зависимость функционала от поля намагниченности через потенциал собственного поля;
- метод расчета распределения намагниченности в полубесконечном стержне, не предполагающий его периодичности или определенности на бесконечности;
- конечно-разностный метод расчета двумерного распределения намагниченности в тонкой пластинке (пленке) на двумерной сетке в трехмерном собственном поле;
- метод вычисления потенциала собственного поля в многослойной ферромагнитной системе с некомпланарными осями легкого намагничивания.

Реализация этих численных методов позволила уточнить и развить уже сложившиеся представления о формировании магнитных структур в одноосных магнетиках различной геометрии и показать новые перспективы их практического использования:

- выявить возможную причину появления «седловых точек» при минимизации функционала свободной энергии магнитной системы и предложить метод их устранения;
- рассчитать распределение намагниченности в бесконечно длинных монокристаллических призмах Co, $Nd_2Fe_{14}B$ и $Ni_{80}Fe_{20}$ с квадратными поперечными сечениями разных размеров и установить, что для монокристаллов Co в некотором интервале размеров возникают доменные

структуры Ландау, в монокристаллах $Nd_2Fe_{14}B$ доменные структуры имеют ленточный вид, в монокристаллах $Ni_{80}Fe_{20}$ структуры Ландау появляются при сравнительно больших размерах;

- установить закономерности формирования различных видов доменных структур в бесконечно длинной монокристаллической призме треугольного сечения;
- предложить новый механизм термического намагничивания в многослойных пленках обусловленный обменным взаимодействием между слоями и предсказать возможность и природу термического намагничивания в бесконечно длинном монокристаллическом стержне высокоанизотропного магнетика в некотором диапазоне поперечных размеров;
- обосновать возможность образования широкого многообразия доменных структур в тонких пластинках (пленках) при изменении только одного параметра – магнитной анизотропии;
- выявить непрерывное изменение типа доменных границ от неелевских к блоховским в тонкой пластинке Co с увеличением толщины пластинки за счет роста зародышей блоховских границ, какими являются вихревые участки, на неелевских границах и таким образом теоретически обосновать существование переходной формы доменных границ - "доменных границ с перевязками";
- провести микромагнитное моделирование магнитной записи на монокристаллической дорожке, при которой магнитостатическим (собственным) полем дорожки формируется полосовая доменная структура, а информационными битами являются блоховские границы доменов;
- оценить величину внешнего магнитного поля, под действием которого происходит перемагничивание блоховской границы, и её изменение под влиянием локального нагревания границы.

Рассмотренные в монографии оригинальные численные методы значительно расширяют круг микромагнитных систем, доступных для компьютерного моделирования, а результаты моделирования способствуют развитию представлений о закономерностях и механизмах формирования доменных структур и процессов перемагничивания в магнитных материалах.

Список основных сокращений и обозначений

ОЛН	– ось лёгкого намагничивания;
ТН	– термическое намагничивание;
ДГ	– доменная граница;
МСС	- многослойная стохастическая система;
$\mathbf{M}$	– вектор намагниченности;
$\mathbf{m} = (m^x, m^y, m^z)$	– единичный вектор намагниченности;
$\mathbf{w}$	– единичный вектор ориентации ОЛН;
$\mathbf{H}_{ext}, \mathbf{h}_{ext}$	– внешнее магнитное поле;
$\mathbf{H}_d, \mathbf{h}_d$	– размагничивающее поле, создаваемое объемными и поверхностными источниками;
$\mathbf{H}_{eff}, \mathbf{h}_{eff}$	– эффективное магнитное поле;
$\mathbf{n}$	– единичная внешняя нормаль к поверхности образца;
M_S	– константа намагниченности насыщения;
ΔM_{term}	– прирост намагниченности в ходе термического намагничивания;
A	– константа обменного взаимодействия;
K_1, K_2	– константы одноосной магнитной анизотропии;
K_T	- температурный коэффициент;
U, u	– потенциал собственного (размагничивающего) поля;
E, W	- свободная энергия системы;
E_e, W_e	– энергия обменного взаимодействия;
E_a, W_a	– энергия магнитной кристаллографической анизотропии;
E_{ext}, W_{ext}	– энергия системы во внешнем магнитном поле;
E_d, W_d	– энергия системы в собственном (размагничивающем) поле;
L	– характерный линейный размер системы;
d_c	- критический размер монокристалла;

λ	– безразмерный параметр, определяющий вклад диссипативного члена в уравнении Ландау;
γ	- гиромагнитное отношение электрона;
h	- пространственный шаг сетки;
$\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}}$	- производная по направлению вектора $\mathbf{e}$;
∇	- градиент;
$\nabla \cdot$	- дивергенция;
Δ	- оператор Лапласа.

Список использованных источников

1. Киттель, Ч. Введение в физику твёрдого тела [Текст]: учеб. пособие / Ч. Киттель. – М.: Наука, 1978. – 507 с.

2. Ландау, Л.Д. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М Лифшиц // В кн. Л.Д. Ландау. Собрание трудов. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – С. 128-143.

3. Кандаурова, Г.С. Доменная структура магнетиков. Основные вопросы микромагнетики [Текст]: учеб. пособие / Г.С. Кандаурова, Л.Г. Онаприенко. – Свердловск: Изд-во УрГУ, 1986. – 137 с.

4. Браун, У.Ф. Микромагнетизм [Текст]: монография / У.Ф. Браун; пер. с англ. А.Г. Гуревич. – М.: Наука, 1979. – 159 с.

5. Люстерник, В.А. Краткий курс функционального анализа [Текст]: учеб. пособие/ В.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

6. Scholz, W. Scalable parallel micromagnetic solvers for magnetic nanostructures [Текст]: диссертация … д. техн. наук / Scholz Werner; Institut für Festkörperphysik. – Wien, 2003. – 196 с.

7. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. [Текст]: учеб. пособие / С.Л. Соболев. – М.: Наука, 1966. – 444 с.

8. Nakatani, Y. Direct solution of Landau-Lifshitz-Gilbert equation for micromagnetics [Текст] / Y. Nakatani, Y. Uesaka, N. Haiashi // Jpn. Appl. Phys. – 1989. – V.28. – P. 2485-2507.

9. Попков, А.Ф. Численное интегрирование уравнений Ландау-Лифшица-Гильберта [Текст] / А.Ф. Попков, Н.В. Воротникова, А.Ю. Полозов// Математическое моделирование – 1999. – Т.11. – № 9 – С. 54-70.

10. Jianhua Xue Micromagnetic calculation for superlattice magnetic recording media [Текст] / Xue Jianhua, R.H. Victora // J. Appl. Phys. – 2000. – V.87. – № 9. – P.6361-6363.

11. Филиппов, Б.Н. Нелинейная динамика доменных стенок с вихревой внутренней структурой в магнитоодноосных пленках с плоскостной анизотропией

[Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г. Корзунин // ЖЭТФ. – 2002. – Т. 121, вып.2. – С. 372-378.

12. Spargo, A.W. Geometric integration the Gilbert equation [Текст] / A.W. Spargo, P.H.W. Ridley, G.W. Roberts // J. Appl. Phys. – 2003. – V.93. – № 10. – P.6805-6807.

13. Visscher, P.B. Quaternion-based algorithm for micromagnetics [Текст] / P.B. Visscher, Xuebing Feng // Phys. Rev. B. – 2002. – V. 65. – P. 104412-1 – 104412-4.

14. Seberino, C. Numerical study of hysteresis and morphology in elongated tape particles [Текст] / C. Seberino, H.M. Bertram // J. Appl. Phys. – 1999. – V.85. – № 8. – P.5543-5545.

15. Chentrell, R.W. Magnetic properties and microstructure of thin-film media [Текст] / R.W. Chentrell, K.M. Tako, M. Wongsam, N. Walmslay, T. Schrefl // J. Magn. Magn. Mater. – 1997. – V. 175. – P. 137-147.

16. Gibbons, M. Micromagnetic simulation using the dynamic alternating direction implicit method [Текст] / M. Gibbons // J. Magn. Magn. Mater. – 1998. – Vol. 186. – P. 389-401.

17. Schrefl, T. Computational micromagnetics: prediction of time dependent and thermal properties [Текст] / T. Schrefl, W. Scholz, D. Suess, J. Fidler // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – V. 226-230. – P. 1213-1219.

18. Kotiuga, R. Potential for computation in micromagnetics via topological conservation laws [Текст] / R. Kotiuga, T. Toffoli // Phys. D – 1998. – V. 120. – P. 139-161.

19. Schrefl, T. Finite elements in numerical micromagnetics. Part I: granular hard magnets [Текст] / T. Schrefl // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – V. 207. – P. 45-65.

20. Schrefl, T. Finite elements in numerical micromagnetics. Part II: Patterned magnetic elements[Текст] / T. Schrefl // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – V. 207. – P. 66-67.

21. Brown, G. Micromagnetic simulations of thermally activated magnetization reversal of nanoscale magnets [Текст] / G. Brown, M.A. Novotny, P. Rikvold // J. Appl. Phys. – 2000. – V.87. – № 9. – P.4792-4794.

22. Schrefl, T. Micromagnetic simulations of 360^o domain walls in thin Co films [Текст] / T. Schrefl, J. Fidler, M. Zehetmayer // J. Appl. Phys. – 2000. – V.87. – № 9. – P. 5517-5519.

23. Jianhua Xue. Micromagnetic predictions for thermally assisted reversal over long time scales [Текст] / Xue Jianhua, R.H. Victora // Appl. Phys. Letters – 2000. – V.77. – № 21. – P.3432-3434.

24. Stancu, A. Micromagnetic analysis of the transverse susceptibility of particulate systems [Текст] / A. Stancu, L. Spinu, C.J. O'Connor // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 242-245. – P. 1026-1029.

25. Elmegreen, B.G. Numerical simulations of magnetic materials with MD-GRAPE: curvature induced anisotropy [Текст] / B.G. Elmegreen, R. Koch, K. Yasuoka, H. Furusawa, T. Narumi, R. Susukita, T. Ebisuzaki // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 242-245. – P. 1026-1029.

26. Vaast-Pasi, C. Numerical simulations of isolated particles susceptibilities: effects of shape and size [Текст] / C. Vaast-Pasi, L. Leylekian // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – V. 237. – P. 342-361.

27. Kronmuller, H. Computational micromagnetism of magnetic structures and magnetization processes in small particles [Текст] / H. Kronmuller, R. Hertel // J. Magn. Magn. Mater. – 2000. – V. 215-216. – P. 11-17.

28. Антонов, Л.И. Влияние толщины одноосной магнитной пленки на ее микромагнитную структуру [Текст] / Л.И. Антонов, Е.В. Лукашева // ФММ – 1998. – Т.85. – вып.3. – С. 64-70.

29. Антонов, Л.И. О расчете периодических доменных структур в ферромагнитных материалах [Текст] / Л.И. Антонов, В.В. Терновский, М.М. Хапаев // ФММ – 1989. – Т.67. – вып.1. – С. 52-56.

30. Антонов, Л.И. Влияние одноосной анизотропии на периодическую доменную структуру магнитных пленок [Текст] / Л.И. Антонов, Е.В. Лукашева, Е.А. Мухина // ФММ – 1995. – Т.80. – № 3. – С. 5-12.

31. Fidler J., Schrefl T., Tsiantos V.D., Scholz W., Suess D. Micromagnetic simulation of the magnetic switching behaviour of mesoscopic and nanoscopic structures

[Текст] / J. Fidler, T. Schrefl, V.D. Tsiantos, W. Scholz, D. Suess // Computational Materials Science. – 2002. – V. 24. – P. 163-174.

32. Kotine, T. Micromagnetics of soft magnetic thin films in presence of defects [Текст] / T. Kotine, Y. Mitsui, K. Shiiki // J. Appl. Phys. – 1995. – V.78. – P. 7220-7225.

33. Lebib, A. Size and thickness dependencies of magnetization reversal in Co dot arrays [Текст] / A. Lebib, S.P. Li, M. Natali, Y. Chen // J. Appl. Phys. – 2001. – V.89. – № 7. - P. 3892-3896.

34. Garcia-Gervera, C.J. Effective dynamics for ferromagnetic thin films [Текст] / C.J. Garcia-Gervera, E. Weinan // J. Appl. Phys. – 2001. – V.90. – № 1. – P. 370-374.

35. Gerardin, O. Micromagnetics of the dynamic susceptibility for coupled Permalloy stripes [Текст] / O. Gerardin, J. Ben Youssef, H. Le Gall, N. Vukadinovic, R.M. Jacquart, M.J. Donahue // J. Appl. Phys. – 2000. – V.88. – № 10. – P. 5899-5903.

36. Csaba, G. Restoration of magnetization distributions from joint magnetic force microscopy measurements and micromagnetic simulations [Текст] / G. Csaba, W. Porod // Journal of Computational Electronics. – 2003. – V.2. – P. 225-229.

37. Sub, D. Micromagnetic simulation of the long-range interaction between NiFe nano-elements using the BE-method [Текст] / D. Sub, T. Schrefl, J. Fidler, J.N. Chapman // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – V. 196-197. – P. 617-619.

38. Ridley, P.H.W. Finite element modeling of nanoelements [Текст] / P.H.W. Ridley, G.W. Roberts, M.A. Wongsam, R.W. Chantrell // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – V. 193. – P. 423-426.

39. Foster, H. Micromagnetic simulation of domain wall motion in magnetic nano-wires [Текст] / H. Foster, T. Schrefl, W. Scholz, D. Suess, V.D. Tsiantos, J. Fidler // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 249. – P. 181-186.

40. Hertel R. Computational micromagnetism of magnetization processes in nickel nanowires [Текст] / R. Hertel // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 249. – P. 251-256.

41. Tsiantos V.D., Scholz W., Suess D., Schrefl T., Fidler J. The effect of the cell size in Langevin micromagnetic simulations [Текст] / V.D. Tsiantos, W. Scholz, D. Suess, T. Schrefl, J. Fidler // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 242-245. – P. 999-1001.

42. Aitchison P.R. High resolution measurement and modeling of magnetic domain structures in epitaxial FePd (001) L^{1_0} films with perpendicular magnetisation [Текст] /

P.R. Aitchison, J.N. Chapman, V. Gehanno, I.S. Weir, M.R. Scheinfein, S. McVitie, A. Marty // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – V. 223. – P. 138-146.

43. Marty A. A new technique for ferromagnetic resonance calculations [Текст] / A. Marty, J.C. Toussaint, N. Vukadinovic, J.B. Youssef, M.A. Labrune // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – V. 242-245. – P. 1038-1040.

44. Schrefl, T. Micromagnetic modeling of nanocomposite magnets [Текст] / T. Schrefl, J. Fidler, D. Suess // Proceedings of 11th International Symposium Magnetic Anisotropy and Coercivity in Rare-Earth Transition Metal Alloys. Sendai, Japan, 2000. – P. S57-S71.

45. Schrefl, T. Micromagnetic modeling – the current state of the art [Текст] / T. Schrefl, J. Fidler // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2000. – V.32. – P. R135-R156.

46. Nozaki, Yu. Micromagnetic structure analysis of head-on-head type 180^o domain wall in submicron size wire [Текст] / Yu. Nozaki, K. Matsuyama, T. Ono, H. Miyajima // J. Appl. Phys. –1999. – V.38. – № 11. – P. 6282 – 6286.

47. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика [Текст]: монография / П. Роуч; пер. с англ. В.А. Гущина и В.Я. Митницкого. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

48. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Марчук. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

49. Годунов, С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы [Текст]: учеб. пособие / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1979.

50. Toussaint, J.C. Micromagnetic modeling of magnetization reversal in permanent magnets [Текст] / J.C. Toussaint, B. Kevorkian, D. Givord, M.F. Rossignol // Proceedings of 9th International Symposium Magnetic Anisotropy and Coercivity in Rare-Earth Transition Metal Alloys (5 Sept. 1996). Sao Paulo, Brazil, 1996. – P. 58-68.

51. Fredkin, D.R. Hybrid method for computing demagnetization fields [Текст] / D.R. Fredkin, T.R. Koehler // IEEE Transaction of Magnetics. – 1990. – V.26. – №2. – P. 415-417.

52. Koehler, T.R. Hybrid FEM-BEM method for fast micromagnetic calculations [Текст] / T.R. Koehler // Physica B – 1997. – V. 233. – P. 302 – 307.

53. Усов, Н.А. Микромагнетизм мелких ферромагнитных частиц, наноструктур и аморфных проводов [Текст]: Дисс. д.ф.-м.н. / Н.А. Усов; Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований. – Троицк, 2000. – 253 с.

54. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст]: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632с.

55. Liberatos, A. Micromagnetics at a finite temperature using the ridge optimization method [Текст] / A. Liberatos, R.W. Chantrell // Physical Review B – 1995. – V. 52. - №6. – P. 4301 – 4312.

56. Schrefl, T. Numerical micromagnetic for granular magnetic materials [Текст] / T. Schrefl, J. Fidler // J. Magn. Magn. Mater. – 1996. – V. 157-158. – P. 331-335.

57. Bernadou, M. Numerical simulation of magnetic microstructure based on energy minimization [Текст] / M. Bernadou, S. Depeyre, S. He, P. Meilland // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – Vol. 242-245. – P. 1018–1020.

58. Brown, G. Determining the saddle point in micromagnetic models of magnetization switching [Электронный ресурс] / G. Brown, M.A. Novotny, P. Rikvold. – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0204180.

59. Dittrich, R. A path method for finding energy barriers and minimum energy paths in complex micromagnetic systems [Текст] / R. Dittrich, T. Schrefl, D. Suess, W. Scholz, H. Forster, J. Fidler // J. Magn. Magn. Mater. – 2002. – Vol. 250. – P. L12–L19.

60. Gibbons, M. Micromagnetic simulation using the dynamic alternating direction implicit method [Текст] / M. Gibbons // J. Magn. Magn. Mater. – 1998. – Vol. 186. – P. 389-401.

61. Толстобров, Ю.В. Влияние метода минимизации функционала свободной энергии на результаты микромагнитного моделирования [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, А.А. Черемисин // ФМФ. – 2004. – Т. 98. - №3. – С. 16-22.

62. Толстобров, Ю.В. Микромагнитное моделирование распределения намагниченности в полубесконечных монокристаллах [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков // ФММ. – 2006. – Т. 102. – №6. – С. 597-601.

63. Толстобров, Ю.В. Потенциал магнитостатического поля бесконечно длинного стержня / Ю.В. Толстобров, М.В. Плетнёва, Н.А. Манаков, Е.К. Борзенко // Фундаментальные науки и образование: Материалы Всероссийской научно-

практической конференции (Бийск, 1-4 февраля 2006 г.) / Бийский пед. гос. ун-т им. В.М. Шукшина. – Бийск: БПГУ им. В.М.Шукшина, 2006. – 394 с. – С. 102-105.

64. Manakov, N. A., Makarov V. N. Possibility of Analysis and Prediction of Magnetic Properties of Nanoobjects by Means of Simulation Taking into Account an Implicit Dependence of the Functional of Their Free Energy on the Magnetization Distribution / N. A. Manakov, V. N. Makarov // Physics of Metals and Metallography. – 2018. – Vol. 119. – No. 3. – P. 212–215.

65. Годунов, С.К. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. пособие / С.К. Годунов. – М.: Наука, 1979. – 392с.

66. Вонсовский, С.В. Ферромагнетизм [Текст]: монография / С.В. Вонсовский, Я.С. Шур. – М.-Л.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. - 816 с.

67. Ивановский, В.И. Физика магнитных явлений. Семинары [Текст]: учеб. пособие / В.И. Ивановский, Л.А. Черникова. – М.: Издательство Московского университета, 1981. - 298 с.

68. Савельев, И.В. Курс общей физики. Т.2 [Текст]: учеб. пособие / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1988. - 496 с.

69. Киттель, К. Физическая теория доменной структуры ферромагнетиков [Текст] / К. Кител ь // Успехи физических наук. – 1950. – Т. XLI. – Вып.4. – С. 453-544.

70. Киренский, Л.В. Магнетизм [Текст]: монография / Киренский Л.В. – М.: Наука, 1967. – 196 с.

71. Hertel, R. Computation of the magnetic domain structure in bulk permalloy [Текст] / R. Hertel, H. Kronmuller // Phys. Rev. B – 1999. - V.60. -№10. - P.7366 -7378.

72. Манаков, Н.А. Микромагнитное моделирование доменных структур в монокристаллах Co. Влияние размера [Текст] / Н.А. Манаков, М.Д. Старостенков, Ю.В. Толстобров, А.А. Черемисин // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2004. – № 2. – С. 47 - 53.

73. Толстобров, Ю.В. Симметричные и асимметричные доменные структуры в полубесконечном монокристалле [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, А.М. Еремин // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32. – вып.24. – С. 24-28.

74. Толстобров, Ю.В. Влияние размеров и анизотропии на формирование доменных структур одноосных монокристаллов [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, А.А. Черемисин // Физика металлов и металловедение, Т.104, № 2, 2007. – С. 135-143.

75. Колесников, П.Н. Микромагнитное моделирование доменных структур в монокристаллической призме треугольного сечения [Текст] / П.Н. Колесников, Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров // Вестник Оренбургского государственного университета. – Т., № 1, 2007.- С. 120-123

76. Лифшиц, Б.Г. Эффекты термического намагничивания и реставрации коэрцитивной силы спеченных $SmCo_5$ магнитов [Текст] / Б.Г. Лифшиц, А.С. Лилеев, В.П. Менушенков // Изв. ВУЗов: Черная металлургия. – 1974. – №11. – С. 140-141.

77. Лифшиц, Б.Г. Исследование «термического намагничивания» сплава $SmCo_5$. [Текст] / Б.Г. Лифшиц, А.С. Лилеев, Т.В. Абальян, В.П. Менушенков // Изв. ВУЗов: Черная металлургия. – 1976. – №11. – С. 131-134.

78. Livingston, J.D. Thermal remagnetization of $SmCo_5$ magnets [Текст] / J.D. Livingston, D.L. Martin // IEEE Trans. Magn. – 1984. – Mag-20. – No.1. – P. 140-143.

79. Jahn, L. The mechanism of thermal remagnetization of permanent magnets [Текст] / L. Jahn, R. Schumann // Phys. stat. sol. A. – 1985. – Vol. 91. – No.2. – P. 603-608.

80. Ivanov, V. On the influence of the coercivity on the thermal remagnetization of RE-permanent magnets [Текст] / V. Ivanov, L. Jahn // Phys. stat. sol. A – 1991. – Vol. 127. – P. 117-120.

81. Jahn, L. Investigation of the thermal remagnetization in sintered hard magnets [Текст] / L. Jahn, R. Schumann, V. Ivanov, // IEEE Trans. Magn. – 2001. – Mag-37. – P. 2506-2510.

82. Schumann, R. The thermal remagnetization of permanent magnets [Текст] / R. Shuman, L. Yahn // Proc. 6th Intern. Sem. Magn., Dohma (GDR). – 1987. – P. 65-70.

83. Schumann, R. Theory of the inverse thermal remagnetization in polycrystalline permanent magnets [Текст] / R. Schumann, L. Jahn // Phys. Met. Metall. – 2001. – Vol. 91. – No.1. – P. 253-257.

84. Schumann, R. Theory of thermal remagnetization of permanent magnets [Текст] / R. Schumann, L. Jahn // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – Vol. 232. – No.3. – P. 231-243.

85. Schumann, R. Thermal remagnetization in polycrystalline permanent magnets [Текст] / R. Schumann, L. Jahn // Recent Res. Devel. Magnetism & Magnetic Mat. – 2003. – Vol. 1. – P. 383-419.

86. Зайцев, А.А. Термическое намагничивание магнитов $SmCo_5$ [Текст] / А.А. Зайцев, А.С. Лилеев, В.П. Менушенков // Изв. ВУЗов: Черная металлургия. – 1988. - №3. – С. 74-78.

87. Gabay, A.M. Magnetostatic interaction in nucleation-type magnets [Текст] / A.M. Gabay, A.S. Lileev, S.A. Melnikov, V.P. Menushenkov // J. Magn. Magn. Mater. – 1991. – Vol. 97. – P. 256-262.

88. Jahn, L. Virgin curves and thermal remagnetization of $Sm_2(Co, Zr, Fe, Cu)_{17}$ [Текст] / L. Jahn, R. Scholl, R. Schumann // Proc. 6th Intern. Sem. Magn., Dohma (GDR). – 1987. – P. 61-64.

89. Műller, K.H. Coercivity and thermal remagnetization of sintered Nd-Fe-B [Текст] / K.H. Műller, D. Eckert, R. Grössinger // Journal de Physique. – 1988. – Vol. 49. – No.12. – P. C8 645-C8 646.

90. Schumann, R. On the irreversible susceptibility of a textured Stoner-Wohlfarth ensemble [Текст] / R. Schumann, L. Jahn // J. Magn. Magn. Mater. – 1995. – Vol. 150. – P. 349-352.

91. Lileev, A.S. Thermal remagnetization in permanent magnets [Текст] / A.S. Lileev, V.P. Menushenkov, A.M Gabay // J. Magn. Magn. Mat. – 1992. – Vol. 117. – No.1. – P. 270-274.

92. Зайцев, А.А. Моделирование явления термического намагничивания [Текст] / А.А. Зайцев, А.С. Лилеев // Изв. ВУЗов: Черная металлургия. – 1989. - №11. – С. 89-92.

93. Jahn, L. Field dependence of thermal remagnetization in sintered hard magnets [Текст] / L. Jahn, R. Schumann // J. Magn. Magn. Mat. – 2002. – Vol. 251. – No.1. – P. 93-98.

94. Jahn, L. Influence of the initial temperature on the thermal remagnetization of $SmCo_5$ sintered magnets [Текст] / L. Jahn, V. Ivanov, R. Schumann, M. Loewenhaupt // J. Magn. Magn. Mater. – 2003. – Vol. 256. – No.1 – P. 41-45.

95. Jahn, L. On the angular dependence of the coercivity of NdFeB hard magnets [Текст] / L. Jahn, J.S. Pastuschenko, V. Christoph // Phys. stat. sol. A. – 1989 – Vol. 116 – No.2. – P. 179-183.

96. Jahn, L. Remanence investigation and interaction in polycrystalline RE/T-hard magnets [Текст] / L. Jahn, V. Ivanov, R. Schumann // Phys. Met. Metall. – 2001. – Vol. 91. – No.1. – P. 268-273.

97. Scholl, R. The thermal remagnetization in 2:17 Sm-Co permanent magnets [Текст] / R. Scholl, L. Jahn, R. Schumann // Phys. stat. sol. A –1987. – Vol. 102. – No.1. – P. 37-41.

98. Pastushenkov, Yu.G. Thermal remagnetization effect in Re-Fe-B permanent magnets [Текст] / Yu.G. Pastushenkov, A.V. Shipov, R.M. Grechishkin, L.E. Afanasieva // J. Magn. Magn. Mater. – 1995. – Vol. 140-144. – P. 1103-1104.

99. Манаков, Н.А. Термическое намагничивание быстрозакаленных сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / Н.А. Манаков // Физика магнитных материалов. – Иркутск, 1993 – С. 42-45.

100. Манаков, Н.А. Дисперсность микроструктуры и гистерезисные свойства сплавов высокоанизотропных редкоземельных магнетиков [Текст] / Н. А. Манаков, В. Н. Вакуленко // ФММ. – 1997. – Т. 84. – №1. – С. 52-54.

101. Кандаурова, Г.С. Основные вопросы теории магнитной доменной структуры [Текст]: учеб. пособие / Г.С. Кандаурова, Л.Г. Онаприенко. – Свердловск: Изд-во УрГУ, 1977. – 124 с.

102. Звёздин, А.К. Квазистатическое вертикальное перемагничивание двухслойного ферромагнетика [Текст] / А.К. Звёздин, В.В. Зюбин, А.Д. Попков // Микроэлектроника. – 1988. – Т. 17. – №2. – С. 165-168.

103. Крюков, И.И. Гистерезисные свойства локального участка аморфно-кристаллического сплава [Текст] / И.И. Крюков // ФММ. – 1991. - №9. – С. 42-52.

104. Крюков, И.И. О природе высококоэрцитивного состояния аморфно-кристаллических сплавов [Текст] / И.И. Крюков, Н.А. Манаков // Укр. физ. журн. – 1990. – Т. 35. – №11. – С. 1727-1732.

105. Крюков, И.И. Перемагничивание магнитной плёнки с непрерывной межфазной границей [Текст] / И.И. Крюков, Н.А. Манаков, В.Б. Садков // Сб. Физика магнитных материалов. – Калинин, 1986. – С. 9-12.

106. Почернин, М.А. Моделирование на ЭВМ перемагничивания фрагмента аморфно-кристаллического материала [Текст] / М.А. Почернин; Иркутский госпединститут. – Иркутск, 1990. – 16 с. Деп. В ВИНИТИ; №1830-В90.

107. Почернин, М.А. Моделирование на ЭВМ процессов перемагничивания одномерных одноугловых микромагнитных систем методом минимизации функционала полной энергии [Текст] / М.А. Почернин; Иркутский госпединститут. – Иркутск, 1989. – 10 с. Деп. В ВИНИТИ; №1834-В89.

108. Почернин, М.А. Реалистическая модель обменной связи в многослойных пленках с перпендикулярной анизотропией [Текст] / М.А. Почернин, В.Б. Садков // 5-е Всероссийское координационное совещание ВУЗов по физике магнитных материалов: Тез. докл. – Астрахань, 1989. – С. 40-41.

109. Иванов, А.А. Магнетик с регулярной неоднородностью поля анизотропии [Текст] / А.А. Иванов, В.А. Орлов // ФММ. – 1997. – Т. 84. – №2. – С. 43-46.

110. Иванов, А.А. Стохастическая магнитная структура ультрадисперсного магнетика [Текст] / А.А. Иванов, Г.О. Патрушев // ФММ. – 1997. – Т. 84. – вып. 4. – С. 35-38.

111. Иванов, А.А. Ориентационный и пространственный беспорядок в поле анизотропии [Текст] / А.А. Иванов, В.А. Орлов, Г.О. Патрушев // ФММ. – 1997. – Т. 84. – вып. 2. – С. 47-52.

112. Иванов, А.А. Структура намагниченности стохастического магнетика [Текст] / А.А. Иванов, Г.О. Патрушев // ФММ. – 1998. – Т. 86. – вып. 4. – С. 5-12.

113. Wuchner, S. Observation and computer simulation of magnetization processes in exchange-coupled Sm-Co/Co-Zr/Sm-Co’ sandwiches [Текст] / S. Wuchner, J.Voiron, J.C.Toussaint, J.J. Prejean // J. Magn. Magn. Mater. – 1995 – Vol. 148. – P. 264-266.

114. Лебедев, Ю.Г. Перемагничивание ионно-имплантированных ЦМД-плёнок [Текст] / Ю.Г.Лебедев, Е.В. Раевский, Ю.К. Миляев, В.Я. Раевский // Микроэлектроника. – 1985. – Т. 16. – №6. – С. 501-511.

115. Садков, В.Б. Перемагничивание неоднородных по толщине магнитных пленок [Текст] / В.Б. Садков, Г.А. Шматов, И.И. Крюков, Б.Н. Филиппов; Препринт № 88/5, УО АН СССР, ИФМ. – Свердловск, 1988. – 40с.

116. Рандошкин, В.В. Динамика доменной стенки в двухслойной одноосной магнитной пленке с разной магнитной анизотропией в слоях [Текст] / В.В. Рандошкин, А.А. Мастин, Н.Н. Сысоев // Изв. ВУЗов: Физика. – 2007. – №8. – С. 3-7.

117. Рандошкин, В.В. Динамика доменной стенки в двухслойной одноосной магнитной пленке с разной намагниченностью насыщения в слоях [Текст] / В.В. Рандошкин, А.А. Мастин, Н.Н. Сысоев // Изв. ВУЗов: Физика. – 2007. – №7. – С. 37-42.

118. Дьячук, П.П. Многослойные ферромагнитные структуры с периодическими неоднородностями анизотропии [Текст] / П.П. Дьячук, Е.В. Лариков // ФТТ. – 1995. – Т. 37. – Вып. 12. – С. 3735-3737.

119. Манаков, Н.А. Анализ магнитного поведения фрагмента микрокристаллического сплава [Текст] / Н.А. Манаков, М.А. Почернин // ФММ. – 1991. – №3. – С. 38-43.

120. Манаков, Н.А. Численное моделирование процессов перемагничивания микрокристаллических сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / Н.А. Манаков, М.А. Почернин // ФММ. – 1991. – №6. – С. 199-201.

121. Шульга, Н.В. Перемагничивание двухслойной обменно-связанной ферромагнитной пленки [Текст] / Н.В. Шульга, Р.А. Дорошенко // ФММ. – 2006. – Т. 102. – №5. – С. 507-600.

122. Манаков, Н.А. Микромагнетизм регулярных и стохастических многослойных систем (статика) [Текст] / Н.А. Манаков Ю.В. Толстобров, О.Л. Суханова // Физика магнитных материалов: Сборник научных трудов Тверского государственного университета. – Тверь, 1999. – С. 27-34.

123. Суханова, О.Л. Перспективы численного моделирования гистерезисных свойств поликристаллических сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] /

О.Л. Суханова, Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков // Материалы и технологии XXI века. – М.: ЦЭИ «Химмаш», 2000. – С. 278-279.

124. Манаков, Н.А. Микромагнетизм многослойных систем [Текст] / Н.А. Манаков, О.Л. Суханова, Ю.В. Толстобров, // XIII Международная конференция по постоянным магнитам. 25-29 сентября 2000г., Суздаль: Тезисы докладов. - Суздаль, 2000. – С. 60.

125. Манаков, Н.А. О возможном механизме термического намагничивания быстрозакаленных сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / Н.А. Манаков, М.В. Плетнёва, Ю.В. Толстобров // Физика металлов и металловедение. – 2005. – Т. 99. – № 1. – С. 14-17.

126. Плетнёва, М.В. К вопросу о роли магнитостатического взаимодействия в эффекте термического намагничивания мелкокристаллических сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / М.В. Плетнёва, Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков // Письма в ЖТФ. – 2005. – Т. 31. – вып. 19. – С. 84-87.

127. Плетнёва, М.В. Влияние различий констант анизотропии в слоях многослойной стохастической системы на эффект термического намагничивания [Текст] / М.В. Плетнёва, Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков // Фундаментальные науки и образование: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (Бийск, 1-4 февраля 2006 г.) / Бийский пед. гос. ун-т им. В.М. Шукшина. – Бийск: БПГУ им. В.М.Шукшина, 2006. – 394 с. – С. 108-110.

128. Плетнёва, М.В. Роль обменного и магнитостатического взаимодействий в эффекте термического намагничивания мелкокристаллических сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / М.В. Плетнёва // Молодые ученые – науке, технологиям и профессиональному образованию в электронике: Материалы Международной научно-технич. школы-конф. 26-30 сентября 2005 г., г. Москва. – М.: МИРЭА, 2005, часть 1. – С. 237-241.

129. Плетнёва, М.В. Роль обменного и магнитостатического взаимодействий в эффекте термического намагничивания мелкокристаллических сплавов высокоанизотропных магнетиков [Текст] / М.В. Плетнёва, Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров // Известия высших учебных заведений. Физика, 2007. – Т. 50. – № 8. – С. 8-11.

130. Толстобров, Ю.В. Эффект термического намагничивания в одноосном монокристалле [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, М.В. Плетнёва // Фундаментальные проблемы современного материаловедения, Т.2, №1, 2005. – С. 110-113.

131. Толстобров, Ю.В. Эффект термического намагничивания в высокоанизотропном монокристалле [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, М.В. Плетнёва // Письма в ЖТФ. – 2006. – Т. 32. – вып. 8. – С. 10-14.

132. Филиппов, Б.Н. Влияние поверхностной анизотропии на тонкую структуру доменных границ в магнитно-одноосных пленках. [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г Корзунин // ФММ. – 1993. – Т. 75. – №. 4. – С. 49-62.

133. Филиппов, Б.Н. Влияние поверхностной магнитной анизотропии на подвижность доменных границ в тонких магнитных пленках [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г Корзунин, В.И. Береснев // Письма в ЖТФ. – 1995. – Т. 21. – вып. 23. – С. 84-88.

134. Филиппов, Б.Н. Стационарное движение вихревых доменных границ в тонких магнитных пленках [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г Корзунин, В.И. Береснев // ФММ. – 1995. – Т.80. – вып. 6. – С. 31-36.

135. Береснев, В.И. Подвижность одновихревых доменных границ в многослойных пленках [Текст]/ В.И. Береснев Л.Г Корзунин, Б.Н. Филиппов, // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22. – вып. 6. – С. 14-18.

136. Филиппов, Б.Н. Двумерная тонкая структура доменных границ в многослойных пленках с плоскостной анизотропией [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г Корзунин // ЖТФ. – 1996. – Т. 66. – вып. 2. – С. 103-115.

137. Филиппов, Б.Н. Влияние поверхностной анизотропии на нелинейную динамику вихревых доменных стенок в магнитных пленках с плоскостной анизотропией [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л.Г. Корзунин, Е.В. Ребрякова // ФММ. – 1996. - Т. 82. - №2. - С. 5-16.

138. Филиппов, Б.Н. Доменные границы в многослойных пленках с плоскостной анизотропией [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, Е. В. Ребрякова // ФММ. – 1996. – Т.81. – № 5. – С. 14-26.

139. Береснев, В.И. Статические свойства одно- и двухвихревых доменных границ в пленках с поверхностной анизотропией [Текст] / В. И. Береснев, Б. Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин // ФММ. – 1997. – Т.84. – вып. 5. – С. 5-9

140. Филиппов, Б.Н. Динамика доменных границ магнитоодноосных пленок с плоскостной анизотропией при наличии поверхностной анизотропии типа плоскость легкого намагничивания [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, Е. В. Ребрякова // ФММ. – 1997. – Т.84. – № 5. – С. 42-47.

141. Филиппов, Б.Н. Динамическое преобразование структуры вихреподобных доменных стенок с плоскостной анизотропией [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин // ФММ. – 1997. – Т.84. – № 2. – С. 13-21.

142. Филиппов, Б.Н. Влияние поверхностной магнитной анизотропии на нелинейную динамику доменных границ с двухмерным распределением намагниченности [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, Е. В. Ребрякова // ФММ. – 1997. – Т.83. – № 6. – С. 19-27.

143. Филиппов, Б.Н. Нелинейная динамика доменных стенок с двухмерной внутренней внутренней структурой в пленках с плоскостной анизотропией [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, Е. В. Ребрякова // ФММ. – 1998. – Т.85. – № 3. – С. 35-39.

144. Корзунин, Л.Г. Нелинейная динамика доменных стенок с двухмерной внутренней внутренней структурой в пленках с плоскостной анизотропией [Текст] / Л. Г. Корзунин, М.Б. Филиппов // ФММ. – 1998. – Т.85. – № 6. – С. 30-37.

145. Филиппов, Б.Н. Влияние одноосной анизотропии на нелинейную динамику доменных границ в магнитных пленках [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин // ФММ. – 1998. – Т.86. – № 3. – С. 5-13.

146. Филиппов, Б.Н. Нелинейная динамика доменных границ с осциллирующей внутренней структурой в магнитных пленках [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин // ФММ. – 1998. – Т.86. – № 5. – С. 17-27.

147. Корзунин, Л.Г. Влияние магнитного поля, перпендикулярного плоскости пленки, на нелинейную динамику доменных границ [Текст]/ Л. Г. Корзунин, С.В. Люкшин, М.Б. Филиппов // ФММ. – 1999. – Т.87. – № 4. – С. 19-23.

148. Филиппов, Б.Н. Нелинейная динамика вихревых доменных стенок в магнитных пленках в широкой области толщин [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, В.И. Береснев, Е. В. Ребрякова // ФММ. – 1999. – Т.87. – № 6. – С. 17-23.

149. Филиппов, Б.Н. Инерционные свойства вихреподобных доменных границ в магнитных пленках [Текст] / Б.Н. Филиппов, Л. Г. Корзунин, С. В. Люкшин // ФММ. – 1999. – Т.87. – № 6. – С. 31-37.

150. Корзунин, Л.Г. Некоторые статические свойства вихреподобных доменных границ в магнитных пленках с кубической кристаллографической анизотропией [Текст] / Л. Г. Корзунин, Б.Н. Филиппов // ФММ. – 2005. – Т.100. – № 2. – С. 5-14.

151. Антонов, Л.И. Периодическая структура намагниченности в ферромагнитных пленках [Текст] / Л. И. Антонов, С. В. Журавлев, Е. В. Лукашева, А. Н. Матвеев // ФММ. – 1992. – № 12. – С. 23-29.

152. Антонов, Л.И. Магнитное поле двумерного периодического распределения намагниченности [Текст] / Л. И. Антонов, Е. А. Мухина, Е. В. Лукашева // ФММ. – 1994. – Т. 78. – № 4. – С. 5-12.

153. Антонов, Л.И. Динамическое установление равновесного периода в структуре намагниченности ферромагнитных пленок [Текст] / Л. И. Антонов, Е. В. Лукашева, Г. А. Миронова, Д. Г. Скачков // ФММ. – 2000. – Т. 90. – № 3. – С. 5-11.

154. Антонов, Л.И. Распределение намагниченности пленочных ферромагнитных монокристаллов типа {1,0,0} с положительной константой анизотропии [Текст] / Л. И. Антонов, Ф. В. Лисовский, Е. А. Мухина, Е. В. Лукашева // ФММ. – 1996. – Т. 81. – № 1. – С. 32-39.

155. Антонов, Л.И. Магнитное поле трехмерного бипериодического распределения намагниченности в ферромагнитной пластинке [Текст] / Л. И. Антонов, Е. В. Лукашева, Г. А. Миронова, М. Н. Приходько // ФММ. – 1999. – Т. 88. – № 4. – С. 21-26.

156. Nowak, U. Micromagnetic simulation of nanoscale films with perpendicular anisotropy [Текст] / U. Nowak// J. Appl. Phys. – 1997. - V.81. - P. 5579-5581.

157. Rave, W. Micromagnetic calculation of the grain size dependence of remanence and coercivity in nanocrystalline permanent magnets [Текст] / W. Rave, K. Ramstök // J. Magn. Magn. Mater. – 1997. – Vol. 171. – P. 69-82.

158. Matsuyama, K. Effect of material parameters on magnetization process in microstructured thin film [Текст] / K. Matsuyama, F. Nakamura, Y. Nozaki // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – Vol. 198-199. – P. 248-249.

159. Mattheis, R. Magnetic reversal in ultra-thin nanoshaped magnetic dots: numerical simulation and Kerr oservation [Текст] / R. Mattheis, D. Berkov, N. Gorn // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – Vol. 198-199. – P. 216-218.

160. Dao, N. Micromagnetic simulation of deep-submicron supermalloy disks [Текст] / N. Dao, S.L. Whittenburg, R.P. Cowbum // J. Appl. Phys. – 2001. - V.90. - № 10 - P. 5235-5237.

161. Chubykalo, O.A. Micromagnetic modeling of field and thermally activated demagnetization processes in ultrathin films with in plane anisotropy [Текст] / O.A. Chubykalo, J.M. Gonzalez, G.R. Aranda, J. Gonzalez // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – Vol. 196-197. – P. 238-239.

162. Castro, J. Domain structures in ferromagnetic ultrathin films with in-plane magnetization [Текст] / J. Castro, S.T. Chui, V.N. Ryzhov // Phys. Rev. B – 1999. - V.60. - № 14 - P. 10271-10279.

163. Chui, S.T. 180^0 domain walls in ultrathin magnetic films with fourfold anisotropy [Текст] /S.T. Chui, V.N. Ryzhov // J. Magn. Magn. Mater. – 1998. – Vol. 182. – P. 25-30.

164. Chubykalo, O.A. Field and thermally activated demagnetization processes in ultra-thin films with in plane anisotropy: occurrence of non-equivalent reversal modes [Текст] / O.A. Chubykalo, J.M. Gonzalez, G.R. Aranda, J. Gonzalez // J. Magn. Magn. Mater. – 2000. – Vol. 222. – P. 314-326.

165. Черемисин, А.А. Численное моделирование распределения намагниченности многослойной стохастической системы в двумерном приближении [Текст] / А.А. Черемисин, Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров // Информационные технологии в экономике, науке и образовании: Материалы 2-ой Всероссийской научно-практической конференции 19-20 апреля 2001 года. – Бийск: БТИ, 2001. – С. 139-141.

166. Manakov, N.A. Micromagnetism of thin ferromagnetic nanowafers [Текст] / N.A. Manakov, Yu. V. Tolstobrov // Second Russian-Japanese Seminar Molecular and

Biophysical Magnetoscience. Program and Proceedings. - Orenburg, Russian Federation, September, 11 –14, 2007. – P. 46.

167. Толстобров, Ю.В. Микромагнитное моделирование распределения намагниченности в тонкой пластинке [Текст] / Ю.В. Толстобров // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т.106. – № 1. – С. 3-6.

168. Kronmüller, H. Computational micromagnetism of magnetic structures and magnetisation processes in small particles [Текст] / H. Kronmüller, R. Hertel // J. Magn. Magn. Mater. – 2000 – Vol. 215-216. – P. 11-17.

169. Манаков, Н.А. К вопросу формирования доменных структур в тонких ферромагнитных пластинках [Текст] / Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2008. – № 9 – С. 217-219.

170. Медведева, О.Н. Магнитная фазовая диаграмма и доменная структура интерметаллического соединения $Nd_2Fe_{14}B$ [Текст]: автореферат дис. кандидата физ.-мат. наук: 01.04.11 / О.Н. Медведева. – Тверь, 2003. – 20 с.

171. Балбашов, А.М. Элементы и устройства на цилиндрических доменах [Текст]: справочник / А.М. Балбашов, Ф.В. Лисовский, В.К. Раев и др.; под ред. Н.Н. Евтихеева, Б.Н. Наумова. – М.: Радио и связь, 1987. – 488 с.

172. Gehanno, V. Magnetic susceptibility and magnetic domain configuration as a function of the layer thickness in epitaxial FePd(001) thin films ordered in the $L1_0$ structure [Текст] / V. Gehanno, Y. Samson, A. Marty, B. Gilles, A. Chemberod // J. Magn. Magn. Mater. – 1997. – Vol. 172. – P. 26-40.

173. Чеботкевич, Л.А. Структура и магнитная анизотропия пленок Co/Cu/Co [Текст] / Л.А. Чеботкевич, А.В. Огнев, Б.Н. Грудин // ФТТ. – 2004. – Т. 46. – Вып. 8. – С. 1449-1454.

174. Толстобров, Ю.В. Микромагнитное моделирование распределения намагниченности в тонкой пластинке [Текст] / Ю.В. Толстобров // Физика металлов и металловедение. – 2008. – Т.106. – № 1. – С. 3-6.

175. Манаков, Н.А. Влияние толщины на доменную структуру тонких магнитных пленок [Текст] / Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров, Ф.А. Герасимов // Вестник Оренбургского государственного университета. – 2011. – № 1(120). – С. 163-165.

176. Сиаккоу, М. Физические основы записи информации [Текст]: монография /М. Сиаккоу; пер. с немецкого И.Д. Гурвица. - М.: Связь, 1980. - 192 с.

177. Srinivasan, K. Thermal stability and the magnetization process in $CoCrPt-SiO_2$ perpendicular recording media [Текст] / K. Srinivasan, S.N. Piramanayagam, R. Sbiaa, R.W. Chantrell // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 3041-3045.

178. Yamane, H. Fe-Pt-MgO stacked films for perpendicular magnetic recording [Текст] / H. Yamane // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 3064-3067.

179. Miyashita, E. Effect of intergranular interactions on recording characteristics [Текст] / E. Miyashita, K. Kawana, H. Shiino, N. Hayashi // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 2921-2924.

180. HDD будущего [Электронный ресурс] – Электрон. текст. дан. – Режим доступа : http://www.ferra.ru/online/storage/s26119/

181. Nakamura, Y. Perpendicular magnetic recording – progress and prospects [Текст] / Y. Nakamura // J. Magn. Magn. Mater. – 1999. – Vol. 200. – P. 634-648.

182. Shukh, A. 3D FEM modeling of keeper effect on perpendicular recording [Текст] / A. Shukh // J. Magn. Magn. Mater. – 2001. – Vol. 235. – P. 403-407.

183. Piramanayagam, S.N. Recording media research for future hard disk drives [Текст] / S.N. Piramanayagam, K. Srinivasan // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 485-494.

184. Gao, K.Z. Read and write processes, and head technology for perpendicular recording [Текст] / K.Z. Gao, O. Heinonen, Y. Chen // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 495-507.

185. Terris, B.D. Fabrication challenges for patterned recording media [Текст] / B.D. Terris // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 512-517.

186. Suess, D. Exchange-coupled perpendicular media [Текст] / D. Suess, J. Lee, T. Schrefl // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 545-554.

187. Wood, R. Future hard disk drive systems [Текст] / R. Wood // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 555-561.

188. Kikitsu, A. Prospects for bit patterned media for high-density magnetic recording [Текст] / R. Wood // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 526-530.

189. Greaves, S. Read – write issues in ultra-high density perpendicular recording [Текст] / S. Greaves // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 477-484.

190. Mallary, M. Perpendicular recording write process modeling issues [Текст] / M. Mallary, M. Benakli, A. Dmytro // J. Magn. Magn. Mater. – 2009. – Vol. 321. – P. 566-571.

191. Heinonen, O. Extensions of perpendicular recording [Текст] / O. Heinonen, K.Z. Gao // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 2885-2888.

192. Greaves, S. Simulation of recording media 1 Tb/in^2 [Текст] / S. Greaves, H. Muraoka, Y. Kanai // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 2889-2893.

193. Schabes, M.E. Micromagnetic simulations for $terabit/in^2$ head/media systems [Текст] / M.E. Schabes // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 2880-2884.

194. Honda, N. Recording simulation beyond $2\,Tbit/in^2$ on bit-patterned media with shielded planar head [Текст] / N. Honda, K. Yamakawa, K. Ouchi // J. Magn. Magn. Mater. – 2008. – Vol. 320. – P. 2980-2984.

195. Манаков, Н.А. Потенциальные возможности магнитной записи на монокристаллической пленке [Текст] / Н.А. Манаков, Ю.В. Толстобров, А.С. Заиграев // Материалы всероссийской научно-практической конференции «Многопрофильный университет как региональный центр образования и науки» (20-22 мая 2009 г.). Секция № 26. Вопросы фундаментальной и прикладной физики. – Оренбург, ИПК ГОУ ОГУ, 2009. – С. 2292-2296. ISBN 978-5-7410-0941-3.

196. Tolstobrov, Yu. V. Magnetic Recording on Domain Walls in a Single Crystal Film [Текст] / Yu. V. Tolstobrov, N. A. Manakov, A. S. Zaigraev // Technical Physics Letters. – 2009. – Vol. 35. – No. 10. – P. 879–881.

197. Толстобров, Ю.В. Магнитная запись на доменных границах монокристаллической пленки [Текст] / Ю.В. Толстобров, Н.А. Манаков, А.С. Заиграев // Письма в журнал технической физики. – 2009. – Т.35. – № 19. – С. 1 – 5.

198. Tolstobrov, Yu.V. Stability of Magnetic Recording on Domain Walls [Текст] / Yu. V. Tolstobrov, N. A. Manakov, G.S. Shiling, D.Yu. Korotkih // Technical Physics Letters. – 2012. – Vol. 38. – No. 12. – P. 1070–1072.