Реннер А.Г.
Оренбургский государственный университет

ОЦЕНКА ПЛАТЕЖЕСПОСОБНОСТИ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

В настоящей работе предлагается решение задачи оценки платежеспособности страховой компании в классической модели риска в классе таких распределений величины выплат, которые допускают аналитическое представление для интеграла Лапласа.

Определим процесс риска (см. рис. 1) некоторого страхового бизнеса следующим образом:

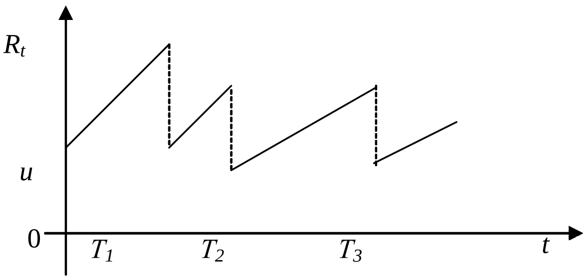

Рисунок 1. Процесс риска R_t

$$R_t = u + c \cdot t - \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k, \qquad (1)$$

где u – начальный капитал;

c – скорость(интенсивность) поступления «премий», взносов;

ζ_k – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, интерпретируемых как размер выплат страховой компанией клиентам по искам с математическим ожиданием μ и функцией распределения $F(x) = P(\xi_i < x)$, $\mu = M\xi_i$, $(F(0) = 0,\ \mu < \infty)$;

$N = (N_t)_{t\geq 0}$ – процесс Пуассона, описывающий число выплат за временной промежуток (0, t),

$$N_t = \sum_k I(T_k \leq t)$$

$I(T_k \leq t)$ – число исков предъявляемых страховой компании в момент времени T_k, равное 0 или 1;

$T_1, T_2\dots$ – моменты поступления требований к оплате, причем $(T_{k+1} - T_k)_{k\geq 1}$ являются независимыми величинами, имеющими экспоненциальное распределение с параметром λ:

$$P(T_{k+1} - T_k < t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

R_t – капитал страховой компании на момент времени t.

Модель (1) известна как модель Лундберга-Крамера [1]

Так как

$$MR_t = u + (c - \lambda\mu)t,$$

то, полагая коэффициент нагрузки

$$\rho = c/(\lambda\mu) - 1,$$

получаем, что скорость поступления премий

$$c = (1 + \rho)\lambda\mu$$

Ставится задача нахождения или оценки вероятности неразорения компании с начальным капиталом «u»

$$\Phi(u) = P(R_t \geq 0,\ R_0 = u,\ t \geq 0)$$

Предполагая $F(x)$ достаточно гладкой, на основании формулы полной вероятности и свойства ординарности пуассоновского процесса, относительно искомой функции $\Phi(u)$, легко получить [2] интегро-дифференциальное уравнение

$$\lambda\Phi(u) = c\Phi'(u) + \lambda\int_0^u \Phi(u - x)f(x)dx, \qquad (2)$$

где $f(x) = F'(x)$ – плотность распределения величины выплат.

Считается, что в случае произвольного распределения величины выплат получение аналитического выражения для $\Phi(u)$ затруднительно и поэтому для вероятности разорения $\psi(u)$ используют неравенство Крамера-Лундберга [1], или получают численное решение уравнения, используя трудоемкий алгоритм Дюфресне и Гербера [3] и его модификации [4].

Однако, для широкого класса достаточно гладких распределений $F(x)$ покажем принципиальную возможность аналитического решения с помощью преобразования Лапласа.

Заметим, что функции $\Phi(t)$ и $f(t)$ по определению удовлетворяют требованиям, предъявляемым к оригиналам:

1) $\Phi(t) \equiv 0,\ f(t) \equiv 0$ при всех t<0;

2) $\Phi(t) \neq 0,\ f(t) \neq 0$ при всех или некоторых $t \geq 0$ и являются однозначными, непрерывными или кусочно-непрерывными функциями.

3) $\Phi(t),\ f(t)$ являются функциями ограниченного роста.

Применим преобразование Лапласа к (2) и, учитывая его свойства, в частности теорему о свертке, получим:

$$\lambda\varphi(p) = c(p\varphi(p) - \Phi(0)) + \lambda\varphi(p)Y(p), \qquad (3)$$

где

$$\varphi(p) = L\{\Phi(u)\} = \int_0^\infty \Phi(u)e^{-pu}du,$$

$$Y(p) = L\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx,$$

$$\varphi(p)\cdot Y(p)=L\left(\int_0^u \Phi(u-x)f(x)dx\right)$$

Из (3) выразим $\varphi(p)$:

$$\varphi(p)=(-c\Phi(0))/(\lambda-cp-\lambda Y(p))$$

Формально, используя обратное преобразование Лапласа L^{-1}, определим с точностью до постоянного множителя

$$\Phi(u)=-c\Phi(0)\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty+R_e p}^{j\infty+R_e p}(\lambda-cP-\lambda Y(p))e^{jpu}dp \quad (4)$$

где j – мнимая единица ($j^2=-1$).

Отметим, что на практике зачастую удается восстановить оригинал $\Phi(x)$ без использования выражения (4). Постоянный множитель $\Phi(0)$ определим используя очевидное требование $\Phi(\infty)=1$.

Предложенный подход проиллюстрируем для случая экспоненциального распределения времени выплат.

Полагая

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

запишем (2) в виде:

$$\lambda\Phi(u)=c\Phi'(u)+\lambda\int_0^u\Phi(u-x)\frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}x}dx$$

С помощью преобразования Лапласа получим:

$$\lambda\varphi(p)=c(p\varphi(p)-\Phi(0))+\frac{\lambda}{\mu}\varphi(p)\frac{1}{P+\frac{1}{\mu}}$$

Выражение для $\varphi(p)$ представим в виде:

$$\varphi(p)=\Phi(0)\left(\frac{A}{p}+\frac{B}{p-(\lambda/c-1/\mu)}\right),$$

где

$$A=-\frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}},\qquad B=\frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}}.$$

Осуществив обратное преобразование Лапласа, найдем вероятность неразорения с точностью до постоянного множителя

$$\Phi(u)=\frac{\Phi(0)}{\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}}\left(-\frac{1}{\mu}+\frac{\lambda}{c}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}\right)x\right)\right)$$

В итоге, удовлетворив условию $\Phi(\infty)=1$, получим оценку платежеспособности страховой компании в зависимости от u, ρ, μ

$$\Phi(u)=1-\frac{\lambda\mu}{c}\exp\left(\left(\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}\right)x\right)=1-\frac{1}{1+\rho}\exp\frac{-\rho x}{(1+\rho)\mu}$$

В общем случае безусловной проблемой является построение изображения $Y(p)$, но при удачной аппроксимации $f(x)$ эту проблему можно снять.

Список использованной литературы:

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.
2. Мельников А.В., Бойков И.В. Элементы страхового риск-менеджмента. М.: АФЦ, 2000, 87с.
3. DUFRESNEF AND GERBER H.U. (1989) THREE Methods to Calculate the Probability of Ruin. Astin Bulletin, Vol. 19, №1, 71-90.
4. Цициашвили Г.Ш., Скварнин Е.С. Финансово-актуарная математика и смежные вопросы. Труды ФАМ, 2002, Красноярск, ИВМ СО РАН.