В.Н. Канюков, А.Д. Мурашов

ОБ АЛГОРИТМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТОЧКИ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ЕВКЛИДОВА ВЕЩЕСТВЕННОГО ПРОСТРАНСТВА R^2

В работе предложен простой и оригинальный алгоритм определения принадлежности (внутри, на границе, вне) точки к связной области на евклидовой плоскости R^2. Доказана математическая корректность алгоритма. Алгоритм чрезвычайно актуален в задачах и приложениях компьютерной графики.

ВВЕДЕНИЕ

Для широкого класса задач компьютерной графики очень актуален вопрос о принадлежности или непринадлежности той или иной точки к заданной открытой или замкнутой односвязной области G евклидова пространства R^2 с кусочно-гладкой границей. Вопрос об этом, к примеру, неизбежно встает при любой задаче компьютерной графики в раскраске тех или иных областей заданным цветом, например, визуализация объектов медико-биологической топографии, описываемых аналитическими методами, список примеров можно продолжить.

Любая односвязная область топологически эквивалентна открытому или замкнутому кругу, и в этом смысле она относительно проста. Существующие алгоритмы раскраски областей используют, как правило, эвристические соображения, обычно это различные вариации сканирования области лучами с последующим определением факта пересечения сканирующего луча с границей области, с использованием рекурсивных алгоритмов, и, в целом, неплохо приспособлены для работы с выпуклыми областями. Однако для произвольных невыпуклых областей сложной топографии задача раскраски порой резко усложняется и эффективность алгоритма существенно падает, авторы неоднократно сталкивались с этой проблемой при раскрасках сложных «нетривиальных» двумерных рисунков в офтальмологии.

В функциях прикладных задач визуализации офтальмологических «картинок» нередко требуется точное позиционирование тех или иных геометрических объектов с достоверным знанием принадлежности характерных «опорных» точек тем или иным замкнутым областям. В этих случаях применение встроенных в инструментальные программные средства функций либо невозможно, либо они отсутствуют вообще. Аналогичные проблемы могут возникнуть, как довелось убедиться одному из авторов, в решении задач с географическими картами, естественным образом возникающими в вопросах связи при проектировании транспортных сетей передачи данных.

Предлагается строгое решение задачи о принадлежности или непринадлежности произвольной точки к заданной открытой или замкнутой односвязной области G с кусочно-гладкой границей, лежащей в евклидовом пространстве R^2.

1. ПОТОК ПЛОСКОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Пусть в R^2 задана декартова система координат xOy с определенной в ней замкнутой, то есть содержащей в себе все собственные предельные точки, односвязной областью $G \subset R^2$, границей которой является замкнутая кусочно-гладкая кривая $\gamma \subset KC^1$ с заданной внешней нормалью $\mathbf{n}$. Рассмотрим поток F плоского векторного поля $\mathbf{V}(x, y) = \mathbf{r}/r^2$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$ – радиус – вектор точки (x,y), через границу γ области G. Если поле $\mathbf{V}(x, y)$ трактовать как поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости, то из физических соображений ясно, что поток поля через границу будет равен нулю (сколько жидкости втекает в область, столько и вытекает), если начало координат $O(0, 0) \notin G$, и напротив, поток поля не равен нулю в противном случае, когда $O(0, 0) \in G$. Докажем этот факт.

Всюду в работе векторы будут обозначаться латинскими буквами с выделением жирным шрифтом. Модули векторов и другие скалярные величины обозначаем обычным шрифтом.

Запишем выражение теоремы Остроградского – Гаусса в двумерном случае.

Обозначим: dV – элемент площади области G, ds – элемент длины границы γ, $(\mathbf{V}, \mathbf{n})$ или (V, n) – скалярное произведение векторов поля $\mathbf{V}(x, y)$ и нормали к границе $\mathbf{n}$. Тогда:

(1)

Очевидно, что в нашем случае $(\mathbf{V}, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}/r^2, \mathbf{n}) = \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})/r$.

В данном случае выражение $\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ означает косинус угла между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$.

Рассмотрим выражение $\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})ds/r$, где ds – элемент длины границы γ. На элементе ds выберем произвольную точку, через которую проведем окружность с центром в O (0, 0). Нетрудно заметить, что элемент ds из точки O (0, 0) будет виден под углом $d\varphi = \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})ds/r$, отсюда следует:

- Если $O(0, 0) \notin G$ – точка лежит вне области G, то полный поток F = 0;
- Если $O(0, 0) \in \gamma$ – точка лежит на границе области G, то полный поток $F = \pi$;
- Если $O(0, 0) \in G$ и $O(0, 0) \notin \gamma$ – точка лежит внутри области G, то полный поток $F = 2\pi$;

Эти рассуждения подкрепим строгими выкладками.

Для вектора **r**(x, y) направляющими косинусами являются

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Ox}) = x/r,\ \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Oy}) = y/r.$$

Таким образом

$$\mathbf{r}(x, y) = r\{\ \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Ox}), \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Oy})\ \} = r\{\ x/r, y/r\ \}$$

Пусть для вектора **n** единичной нормали к кривой γ направляющими косинусами будут Cosλ, Cosμ, где λ, μ – углы вектора **n** с координатными осями Ox, Oy. Из дифференциальной геометрии известно, что при натуральной параметризации кривой (или ее гладкого куска), x = x(s), y = y(s), где s – натуральный параметр – длина пути по кривой в направлении возрастания имеют место соотношения:

$$dx/ds = -\mathrm{Cos}\mu,\ dy/ds = \mathrm{Cos}\lambda$$

и таким образом n = { Cosλ, Cosμ } = { dy/ds, – dx/ds }.

С учетом сказанного

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Ox})\ \mathrm{Cos}\lambda + \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{Oy})\ \mathrm{Cos}\mu = $$
$$= xdy/rds - ydx/rds$$

и выражение для элементарного потока преобразуется в

$$\frac{Cos(r,n)}{r}ds = \frac{xdy - ydx}{r^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \qquad (2)$$

Интеграл по кусочно-гладкой кривой от дифференциальной формы (2) в литературе носит название интеграла Гаусса.

Мы получили, что **V**(x, y) = {P(x, y), Q(x, y)} = {-y/r^2, x/r^2} = -y**i**/r^2 + x**j**/r^2, где **i, j** – единичные орты координатных осей Ox, Oy. Очевидно

$$div V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0 \qquad (3)$$

То есть поле **V**(x, y) соленоидально.

Рассмотрим три случая:

• O(0, 0) ∉ G – точка лежит вне области G; функции P(x, y), Q(x, y) и их частные производные P_x(x,y), Q_y(x,y) непрерывны в G, и, следовательно, согласно (1) и (3) полный поток F = 0.

• Если O(0, 0) ∈ G и O(0, 0) ∉ γ – точка лежит внутри области G; функции P(x,y), Q(x,y), их частные производные P_x(x,y), Q_y(x,y) не определены в точке O(0,0) и не могут быть доопределены в O(0,0) до непрерывности, формула (1) неприменима. Вычислим поток F поля **V**(x, y) через окружность произвольного радиуса R с центром в O(0,0). Направление вектора поля всюду совпадает с направлением нормали **n,** и модуль вектора поля на точках окружности постоянен и |**V**(x, y)| = 1/R, следовательно, поток F = 2πR*1/R = 2π. Разумеется, тот же результат получим, вычисляя криволинейный интеграл второго рода по окружности от дифференциальной формы: ω = (xdy – ydx)/(x^2 + y^2).

Достаточно записать уравнение окружности в полярных координатах

$$x = R\mathrm{Cos}t,\ y = R\mathrm{Sin}t$$
$$(\rho > 0,\ 0 = t < 2\pi,\ dx = -R\mathrm{sin}t{*}dt,\ dy = R\mathrm{cos}t{*}dt)$$

и проинтегрировать форму в пределах от 0 до 2π. Для произвольного замкнутого контура γ значение интеграла, очевидно, не изменится. Достаточно поместить внутри контура γ окружность достаточно малого радиуса ρ > 0 с центром в точке O (0, 0), чтобы не было пересечений с контуром, соединить две произвольные точки окружности с двумя произвольными точками контура двумя непересекающимися отрезками, получатся два замкнутых контура, рассмотреть два криволинейных интеграла по этим двум замкнутым контурам, не содержащим O (0, 0), эти контуры имеют общую границу только по двум отрезкам, интегралы по контурам на этих отрезках взаимно уничтожаются.

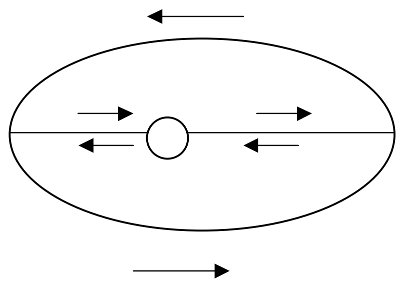

Рисунок 1. Каждый из интегралов по верхнему и нижнему контуру равен 0, поскольку контуры не содержат точки O(0, 0), их сумма также равна нулю. Одновременно их сумма является разностью интегралов только по внешнему произвольному контуру (на рисунке для примера изображен эллипс) и только по внутреннему (окружности с центром в точке O(0, 0)), поскольку интегралы по отрезкам взаимно уничтожаются. Следовательно, интеграл по внешнему контуру равен интегралу по окружности и равен 2π.

• O(0, 0) ∈ γ – точка лежит на границе области G; интеграл от формы

$$\omega = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = \mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})ds/r$$

будет несобственным, но сходящимся, докажем это. Мы даже докажем, что сходимость будет абсолютной.

Пусть **t** – тангенциальный касательный единичный вектор кривой γ, иначе говоря **t** = d**r**/ds = { dx/ds, dy/ds }.

Ясно, что

$$|\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})| = |\mathrm{Sin}(\mathbf{r}, \mathbf{t})| = |\mathrm{Sin}(xdx/ds + ydy/ds)| =$$
$$= |\mathrm{Sin}(0.5d(x^2+y^2)/ds)| = |\mathrm{Sin}(0.5dr^2/ds)|,$$

следовательно,

$$|\mathrm{Cos}(\mathbf{r}, \mathbf{n})|ds/r = |\mathrm{Sin}(\mathbf{r}, \mathbf{t})|ds/r = |\mathrm{Sin}(0.5dr^2/ds)|ds/r$$

Очевидно, что при **r** → (0, 0) Sin(**r, t**) → 0 и найдется окрестность точки O(0,0), где

$$\int_{(0,0)} \left| \frac{Sin\left(\frac{1}{2}\frac{dr^2}{ds}\right)}{r} \right| ds =$$

$$= \int_{(0,0)} \left| \frac{2Sin\left(\frac{1}{2}\frac{dr^2}{ds}\right)}{\frac{dr^2}{ds}} \frac{\frac{dr^2}{ds}}{2r} \right| ds \le \int_{(0,0)} 0.5 \left| \frac{dr^2}{r} \right| = \int_{(0,0)} |dr| \qquad (4)$$

Последний интеграл в формуле (4) очевидным образом абсолютно сходится в (0, 0). Кроме этого мы воспользовались тем, что для любого $\xi \to 0$, $\sin\xi/\xi = 1$, помимо этого граница области $G - \gamma \in KC^1$, а следовательно, это непрерывно дифференцируемая кривая.

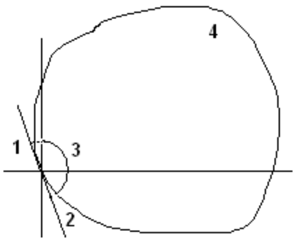

Рисунок 2. Точка О (0, 0) в начале координат. Интеграл по произвольному контуру 1-2-4-1 равен интегралу по контуру 1-2-3-1, при этом участок 1-2 у них общий, интеграл по контуру 1-3-2-4-1 равен нулю, так как точка О (0, 0) лежит вне контура, помимо этого интеграл по участку 2-3-1, представляющему из себя дугу окружности, равен интегралу по участку 2-4-1, поскольку их концы совпадают. В пределе при $\mathbf{r} > (0, 0)$ интеграл по участку 2-3-1 равен p, потому что участок 2-3-1 стремится к полуокружности.

Полный поток $F = \pi$. Доказательство закончено.

Важные замечания.

• Элементарный поток δF нашего поля $\mathbf{V}(x, y)$ через произвольный элемент ds гладкой кривой γ мы можем вычислять как $\delta F = d\varphi$, где $\varphi(x,y)$ – функция – полярный угол точки (x,y), определяемая с точностью до $2\pi k$, где k – целое число. Эта функция в теории функций комплексного переменного хорошо известна. Приращением комплексного аргумента z вдоль кривой γ будет $\Delta\gamma\arg(z) = \mathrm{Im}\int\gamma d\varsigma/\varsigma = \int\gamma(xdy-ydx)/(x^2+y^2)$. Одна из ветвей функции $\varphi(x,y)$ определена на множестве $R^2\backslash(0,0)$ соотношением:

$$d\varphi = \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})ds/r = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2)$$
$$\text{при } (x,y) \neq (0,0).$$

Заметим, что при $x \neq 0$ имеет место

$$d\varphi = (xdy - ydx)/(x^2 + y^2) = d[\mathrm{arctg}(y/x)]$$

Окончательный вид ветви функции φ:

$$\{(x,y) |\ R^2\backslash(0,0)\} \to [0, 2\pi)$$

будет таким:

Таблица 1.

$\varphi(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x)$	при $x > 0$, $y \geq 0$
$\varphi(x,y) = \pi/2$	при $x = 0$, $y > 0$
$\varphi(x,y) = \pi - \mathrm{arctg}(y/\lvert x\rvert)$	при $x < 0$, $y > 0$
$\varphi(x,y) = \pi$	при $x < 0$, $y = 0$
$\varphi(x,y) = \pi + \mathrm{arctg}(y/x)$	при $x < 0$, $y < 0$
$\varphi(x,y) = 3\pi/2$	при $x = 0$, $y < 0$
$\varphi(x,y) = 2\pi - \mathrm{arctg}(\lvert y\rvert/x)$	при $x > 0$, $y < 0$

• Пусть $L(\zeta,\eta)$ – фиксированная точка плоскости R^2, $K(x,y) \in \gamma$ – переменная точка кривой, $\mathbf{r}_L$ – радиус – вектор, соединяющий $L(\zeta,\eta)$ и $K(x,y)$, то есть

$$r_L^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2,$$

тогда все наши рассуждения справедливы и для потока поля $\mathbf{V}(x,y)$, порождаемого этим вектором.

• К сожалению, применение функции $\varphi(x,y)$ неудобно с практической точки зрения, поскольку требуется постоянно отслеживать необходимость добавления или недобавления к значению функции 2π.

• Рассмотрим поток ΔF поля $\mathbf{V}(x,y)$ через отрезок прямой, тогда мы можем рассматривать угол, под которым виден этот отрезок из начала координат, как поток ΔF поля $\mathbf{V}(x,y)$ через этот отрезок, причем угол должны рассматривать как алгебраическую величину. Алгебраический знак этого потока ΔF, а значит и угла, определяется направлением интегрирования по отрезку и может быть определен следующим образом. Если два произвольных вектора $\mathbf{r}_1(x_1,y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2,y_2)$ лежат в плоскости xOy, то их векторное произведение $\mathbf{r}_z=[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2]$ равно векторному произведению векторов $\{x_1,y_1,0\}$, $\{x_2,y_2,0\}$, причем является вектором коллинеарным оси Oz. Координаты $\mathbf{r}_z = \{0,0,x_1y_2-x_2y_1\}$, таким образом, направление вектора $\mathbf{r}_z$ определяется знаком его третьей координаты равной проекции на Oz:

$x_1y_2-x_2y_1 > 0$, направление $\mathbf{r}_z$ совпадает с Oz, поток $\Delta F > 0$

$x_1y_2-x_2y_1 < 0$, направление $\mathbf{r}_z$ противоположно с Oz, поток $\Delta F < 0$

$x_1y_2-x_2y_1 = 0$, $\mathbf{r}_z = \{0,0\}$, векторы $\mathbf{r}_1(x_1,y_1)$, $\mathbf{r}_2(x_2,y_2)$ коллинеарны, поток $\Delta F=0$

• Справедливо обобщение на случай пространств R^n с $n > 2$.

2. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ТОЧКИ К ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ЕВКЛИДОВА ВЕЩЕСТВЕННОГО ПРОСТРАНСТВА R^2

В реальных задачах компьютерной графики все области почти всегда аппроксимируются замкнутыми ломаными линиями, состоящими из отрезков прямых линий. Совершенно очевидна справедливость всего вышесказанного для областей с такой границей.

Построим алгоритм определения принадлежности или непринадлежности заданной фиксированной точки к односвязному плоскому многоугольнику.

<u>Задача.</u> Пусть даны декартовы координаты N вершин произвольного многоугольника на плоскости: $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$, …, $A_N(x_N,y_N)$. Требуется определить, находится ли внутри многоугольника точка $A_0(x_0,y_0)$ этой же плоскости? Считаем, что вершины упорядочены должным образом и самопересечений сторон нет.

Решение.

1. Для каждой стороны многоугольника A_1A_2; …, $A_{N-1}A_N$; A_NA_1 проверяем, принадлежит ли точка $A_0(x_0,y_0)$ какой-нибудь стороне. Для этого проще всего, не вычисляя никаких интегралов, записать уравнение отрезка прямой в параметрическом виде, например для стороны A_1A_2:

$$X(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
$$Y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t, \text{ где } t \in [0, 1]$$

Подставляя в эти уравнения координаты точки $A_0(x_0,y_0)$, элементарно вычисляем соответствующее значение параметра t_0 [например: при $x_2 - x_1 \neq 0$, $t_0 = (x_0 - x_1)/(x_2 - x_1)$], после чего проверяем его принадлежность множеству [0,1]. Если точка $A_0(x_0,y_0)$ принадлежит какой-то стороне многоугольника, работа заканчивается, иными словами, полный поток поля через границу вычислен, $F = \pi$. После чего принимается то или иное решение.

• Заметим, что одновременное равенство $x_2 = x_1, y_2 = y_1$ невозможно, поскольку точки A_1, A_2 различные.

• Кроме этого для любой тройки точек A_0, A_{i-1}, A_i ($i = 1, \ldots, N$) выполняется пара, по крайней мере нестрогих неравенств для треугольника ($|\mathbf{c}| \le |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}| \ge |\mathbf{c} - \mathbf{b}|$). По теореме косинусов угол $\angle A_{i-1}A_0A_i$ (в радианной мере) определяется соотношением:

$$\angle A_{i-1}A_0A_i = \arccos[(A_0A_{i-1}{}^2 + A_0A_i{}^2 - A_{i-1}A_i{}^2)/(2*A_0A_{i-1}*A_0A_i)] \qquad (5)$$

Формула (5) справедлива и для случая, когда точки A_0, A_{i-1}, A_i лежат на одном луче, в этом случае

$$\angle A_{i-1}A_0A_i = \pi/2, \text{ поток } \Delta F = 0.$$

2. Поскольку формула (5) всегда дает неотрицательное значение для угла, а именно: $0 \le \angle A_{i-1}A_0A_i \le \pi$, поэтому для каждой пары ненулевых векторов

$$\mathbf{A_0A_1}(\xi_1,\eta_1), \mathbf{A_0A_2}(\xi_2,\eta_2);\ \mathbf{A_0A_2}(\xi_2,\eta_2), \mathbf{A_0A_3}(\xi_3,\eta_3);\ \ldots$$
$$\mathbf{A_0A_{N-1}}(\xi_{N-1},\eta_{N-1}), \mathbf{A_0A_N};\ \mathbf{A_0A_N}(\xi_N,\eta_N),\ \mathbf{A_0A_1}(\xi_1,\eta_1);$$

вычисляем числа $f_1, f_2, \ldots, f_N$, являющимися потоками поля $\mathbf{V}(x,y)$, через отрезки $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_2A_3}$, …, $\mathbf{A_{N-1}A_N}$, $\mathbf{A_NA_1}$, используя формулы (5).

$$f_1 = \mathrm{sign}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) * \angle A_1A_0A_2$$
$$f_2 = \mathrm{sign}(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) * \angle A_2A_0A_3$$
$$\ldots$$
$$f_{N-1} = \mathrm{sign}(\xi_{N-1}\eta_N - \xi_N\eta_{N-1}) * \angle A_{N-1}A_0A_N$$
$$f_N = \mathrm{sign}(\xi_N\eta_1 - \xi_1\eta_N) * \angle A_NA_0A_1$$

Как обычно в математическом анализе, для τ функция $\mathrm{sign}(\tau)$ определяется следующим образом:

$$\mathrm{sign}(\tau) = 1, \text{ если } \tau > 0$$
$$\mathrm{sign}(\tau) = 0, \text{ если } \tau = 0$$
$$\mathrm{sign}(\tau) = -1, \text{ если } \tau < 0$$

Этим самым вычислена каждая из алгебраических величин – углов (= величина потока поля **V** через сторону многоугольника), под которым из точки $A_0(x_0,y_0)$ видна эта сторона многоугольника.

3. Находим суммарный поток через границу многоугольника, то есть вычисляем сумму потоков

$$F = \sum f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_N$$

4. Если с заданной точностью $|F| = 2\pi$, точка $A_0(x_0,y_0)$ лежит внутри многоугольника, иначе, если с заданной точностью $F = 0$, точка $A_0(x_0,y_0)$ лежит вне многоугольника. Конец работы.

Доказательство правильности алгоритма вытекает из его построения. Разумеется, пункты 1, 2, 3 можно выполнять параллельно. Алгоритм прост и эффективен в работе, время работы $T(N) = O(N)$, где N – количество ребер, O – символика, используется в общепринятом в математическом анализе смысле, то есть зависит линейно от количества вершин.

Все приведенные рассуждения естественным образом обобщаются для трехмерного случая, когда границей области является симплекс. Более того, при необходимости можно сделать обобщение и для произвольного конечномерного евклидова пространства. Возможно обобщение для многосвязных областей.

Список использованной литературы:

1. В.А. Зорич. Математический анализ. Т. 1, 2. – Москва: Наука, 1984.